

FORTGESETZTE

GEODÄTISCHE UNTERSUCHUNGEN

BESTEHEND

IN ZEHN SUPPLEMENTEN

ZUR ABHANDLUNG

VON DER METHODE



DER

KLEINSTEN QUADRATE IM ALLGEMEINEN

UND

IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE GEODÄSIE.





VON

P. A. HANSEN,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des IX. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº I.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1868.

Vom Verfasser übergeben den 19. April 1868.
Der Abdruck vollendet den 15. August 1868.

FORTGESETZTE
GEODÄTISCHE UNTERSUCHUNGEN

BESTEHEND

IN ZEHN SUPPLEMENTEN

ZUR ABHANDLUNG

VON DER METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE IM ALLGEMEINEN

UND

IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE GEODÄSIE.

VON

P. A. HANSEN.

INHALT.

Seite

Suppl. 1. Reflexionen über die Anlage und die Ausführung eines Dreiecksnetzes. 3

Suppl. 2. Von der Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen. 59

Suppl. 3. Ableitung einer bisher unbekannten Bedingungsgleichung, die im zweiten Theile der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes statt findet. 80

Suppl. 4. Von der Behandlung etwa vorhandener, überzähligen Richtungen. 84

Suppl. 5. Entwickelung eines besonderen Falles, in welchem die für die Ausgleichungen auf den Stationen aufzulösenden Gleichungen sich in zwei oder mehrere, von einander völlig unabhängige Systeme zerlegen lassen. 102

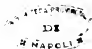
Suppl. 6. Ableitung der Bedingungsgleichungen in besonderen Fällen, mit Beibehaltung der im Vorhergehenden stets angewandten Form derselben. 153

Suppl. 7. Berichtigung eines in der Abhandlung vorkommenden kleinen Misgriffs. 162

Suppl. 8. Berechnung der $f(r,I)_s$, etc. und der (I,M), etc. ohne Zuziehung der $\eta(r,I)_s$, etc. 163

Suppl. 9. Die mit α, β, γ etc. nebst angehängten Strichen bezeichneten Grössen betreffend 165

Suppl. 10. Das Beobachtungsverfahren betreffend, welches Gauss in der Hannöverschen Gradmessung angewandt hat 169



Suppl. 1. Reflexionen über die Anlage und die Ausführung eines Dreiecksnetzes.

§ 1. Allgemeine Betrachtungen.

1.

In früherer Zeit, wo die Ausgleichungstheorie unbekannt war, und man die Dreiecke, aus welchen ein Dreiecksnetz besteht, gemeiniglich blos an einander reihte, war es strenge, und der damaligen Sachlage vollkommen angemessene Vorschrift, dass in jedem Dreieck alle drei Winkel beobachtet werden mussten. Die Summe der aus den Beobachtungen hervorgehenden Werthe der Winkel eines Dreiecks war damals die einzige Controle, die man sich in Bezug auf die Ausführung der Beobachtungen verschaffen konnte, und die gleichmässige Vertheilung des Unterschiedes zwischen dem Betrage dieser Summe und dem theoretischen Werthe derselben auf alle drei Winkel die einzige Ausgleichung, die man kannte.

In Bezug auf die Grösse der Winkel der Dreiecke schrieb man ein Minimum vor, welches nicht überschritten werden durfte, man verordnete z. B. dass, ohne Ausnahmen zu gestatten, in keinem Dreiecke Winkel vorkommen dürften, die kleiner wie 24° wären, welche Zahl man hie und da auch auf 30° erhöht hat. In dieser Beziehung ist man zu weit gegangen, denn es lässt sich beweisen, dass unter Umständen auch in an einander gereihten Dreiecken die kleinsten Winkel zulässig sind, indem sie auf die Genauigkeit der daraus folgenden Dreiecksseiten nicht den geringsten nachtheiligen Einfluss ausüben; dieses wird weiter unten bewiesen werden.

Auch die erlaubte Grösse des Unterschiedes zwischen der beobachteten Summe der Winkel der Dreiecke und dem theoretischen Werthe

derselben bestimmte man. Es ist dieses freilich in gewissem Sinne eine Bestimmung der erlaubten Gränze des mittleren Fehlers der Beobachtungen an sich, aber eine sehr mangelhafte und unvollkommene. Es lässt sich indess nichts dagegen sagen, da sie in einer Zeit getroffen wurde, in welcher die Bestimmung des mittleren Fehlers der Beobachtungen entweder unbekannt, oder doch nur Wenigen bekannt war.

Man bestimmte ferner die erlaubte Fehlergränze der Dreiecksseiten, die man, ohne auf die Lage dieser Seiten im Netze Rücksicht zu nehmen, durch eine unveränderliche Verhältnisszahl ausdrückte. Man hat z. B. verordnet, dass in den Dreiecken erster Ordnung diese Fehlergränze $\frac{1}{100000}$ der Länge der Dreiecksseiten nicht übersteigen dürfe. Wie man grade auf diese Zahl gekommen ist, lässt sich schwer einsehen, da man in jener Zeit keine Hülfsmittel besass, den mittleren Fehler eines durch geodätische Operationen erlangten Resultats berechnen zu können. Aber abgesehen davon, ist jede derartige Bestimmung unhaltbar, denn davon konnte man sich doch wohl in jener Zeit schon überzeugen, dass die mittleren Fehler der Dreiecksseiten, von der gemessenen Grundlinie an, sich immer mehr und mehr vergrössern müssen, je grösser die Anzahl der Dreiecke ist, die zwischen der Grundlinie und der betreffenden Dreiecksseite liegen. Man gab hiemit eine Fehlergränze an, die wenn sie auch für Dreiecksseiten, die in der Nähe der Grundlinie liegen, eingehalten werden konnte, bei Dreiecksseiten, die von dieser sehr entfernt liegen, gewiss nie hat eingehalten werden können. Wenn man solche Dreiecksseiten aufweisen können sollte, die um weniger, wie die oben genannte Zahl, von einander abweichen, so ist gewiss der Zufall zu Hülfe gekommen, und der zufällige Fehler, den die directe Vergleichung gegeben hat, ist grade weit kleiner gewesen, wie der mittlere. Man wird weiter unten die Zunahme der mittleren Fehler der Dreiecksseiten untersucht finden.

Die Festsetzung einer Fehlergränze der Dreiecksseiten neben der der Beobachtungen bildet aber, auch wenn man sie von Dreieck zu Dreieck veränderlich annehmen wollte, einen theoretischen Widerspruch. Denn aus den mittleren Fehlern der Winkel allein folgen schon in jedem einzelnen Falle die mittleren Fehler der Seiten durch bestimmte und unabänderliche, mathematische Relationen. Indem man also beide Fehlergränzen im Voraus bestimmte, betrachtete man zwei Fehlerbestimmungen von einander als unabhängig, die in der That von einander

abhängig sind, und konnte somit dem geschicktesten und gewissenhaftesten Trigonometer die Verlegenheit bereiten, dass er, obgleich seine Winkelmessungen unter der erlaubten Fehlergränze geblieben waren, dennoch die vorgeschriebene Fehlergränze in den Seiten nicht inne halten konnte. Es waren noch dazu die Mittel, deren man sich bediente, um die Fehler der Seiten zu erkennen sehr unvollkommen und mangelhaft. Man verglich die Werthe einer und derselben Dreiecksseite, die aus zwei verschiedenen Triangulationen hervorgegangen waren, mit einander, ohne zu berücksichtigen, welchen Werth jede dieser beiden Bestimmungen hatte. Es ist sogar bei solchen Vergleichungen vorgekommen, dass man die eine Bestimmung der Seite stillschweigend als absolut richtig betrachtet, und den Unterschied, den die Vergleichung ergab, der anderen Bestimmung derselben ausschliesslich zur Last gelegt hat. Es lassen sich von solcher Behandlung dieser Sache Fälle anführen.

2.

Seit der Einführung der Ausgleichungstheorie haben sich die vorbenannten Umstände sehr geändert, in der Anlage und Ausführung eines Dreiecksnetzes ist jetzt ein weit grösserer Spielraum gestattet, und man kann sich von dem Erfolge, den man erreicht hat, eine sichere und vollständige Vorstellung verschaffen. Die Fälle in welchen ein kleiner Winkel vermieden werden muss, stehen jetzt viel vereinzelter da, die Nothwendigkeit in jedem Dreiecke alle drei Winkel beobachten zu müssen fällt weg, und man kann daher in Gegenden, wo die Beschaffenheit der Erdoberfläche früher der Ausführung eines guten Dreiecksnetzes fast unüberwindliche Schwierigkeiten darbot, ein solches mit weit grösserer Leichtigkeit herstellen. Die Ursache davon liegt in dem Umstande, dass man eine grössere Anzahl von Bedingungsgleichungen verschiedener Gattung in das Dreiecksnetz nicht nur einführen, sondern auf die vortheilhafteste Weise benutzen kann*). Die sichere Vorstellung von dem Erfolge der Arbeit erlangt man dadurch, dass man sich in den Stand gesetzt sieht, die Gewichte und die mittleren Fehler der einzelnen Stücke

*) Man hat vor der Einführung der Ausgleichungstheorie zwar auch in einzelnen Fällen die Anlage eines Dreiecksnetzes so ausgeführt, dass es eine grössere Anzahl von Bedingungsgleichungen darbot, wie die, die aus der Summe der Winkel der einzelnen Dreiecke hervorgehen, aber man hat diese Bedingungsgleichungen nur auf sehr unvollkommene Art zu benutzen verstanden.

des Dreiecksnetzes berechnen zu können. Das einzige Kriterion, welches die Wissenschaft besitzt, um die Sicherheit zu bestimmen, mit welcher irgend eine Function der Beobachtungen, vermöge der Abhängigkeit derselben von den Beobachtungen, durch die letzteren bestimmt wird, bietet die Berechnung des Gewichts der Function dar. Der mittlere Fehler der Bestimmung dieser Function ergieht sich hierauf durch die Verbindung dieses Gewichts mit dem mittleren Fehler der Gattung von Beobachtungen, deren Gewicht der Einheit gleich gesetzt worden ist.

3.

Die Formeln für die Berechnung, sowohl der Gewichte irgend welcher bestimmten Function der bei der Messung eines Dreiecksnetzes erhaltenen Beobachtungen, wie der mittleren Fehler sind in der Abhandlung abgeleitet und gegeben worden; wir wollen hier die Wirkung der Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes auf die Gewichte untersuchen. Bezeichnen wir irgend ein Gewicht wieder mit P, so ist zufolge der Abhandlung

$$P = \frac{1}{R-S}$$

wo R und S Grössen sind, deren jede aus einem Aggregat von Gliedern besteht, deren jedes nothwendiger Weise positiv ist. Denn in jedem ist der Zähler ein Quadrat, und der Nenner eine Grösse, die der Natur der Sache nach stets positiv ist. Ferner ist R immer von den Bedingungsgleichungen unabhängig, während S eine Function dieser ist. Die Zahl der Glieder, aus welchen S besteht, ist im Allgemeinen der Zahl der Bedingungsgleichungen gleich, es kann sich jedoch ereignen, dass von diesen Gliedern Eins oder mehrere gleich Null werden. Ja es giebt sogar einzelne hesondere Fälle, in welchen alle Glieder, und folglich auch S selbst, gleich Null werden. Hieraus folgt schon, dass das Vorhandensein von Bedingungsgleichungen die Gewichte im Allgemeinen immer vergrössert, denn dem Vorhergehenden zufolge ist immer $R > R-S$. Man kann in vielen Fällen die Gewichte auf mehrere Arten berechnen, indem sich oft die Gleichungen, von welchen man ausgehen muss, auf verschiedene Arten aufstellen lassen, und dadurch kann der Fall eintreten, dass bei diesen verschiedenen Berechnungsarten beide Grössen R und S verschiedene Werthe annehmen, aber die Werthe, die sie annehmen, sind immer so beschaffen, dass für jede einzelne,

bestimmte Function der Werth von $R-S$, und folglich auch der von P derselbe bleibt.

Nehmen wir nun an, dass man von den vorhandenen Bedingungsgleichungen Eine weglässt, so besteht die einzige Veränderung, die der Ausdruck des Gewichts erleidet, darin, dass das betreffende Glied des Ausdrucks von S wegfällt, wenn es nicht ohnehin Null war. Es wird daher das Gewicht P der betreffenden Function kleiner, wenigstens nie grösser. Im entgegengesetzten Falle, nemlich wenn zu den bisher vorhandenen Bedingungsgleichungen eine neue hinzukommt, lässt sich eben so beweisen, dass das Gewicht P grösser, wenigstens nie kleiner wird. Da die Fälle, in welchen weggelassene, oder hinzugefügte Bedingungsgleichungen keine Wirkung auf ein Gewicht haben, immer vereinzelt dastehen, und wenn eine solche Bedingungsgleichung auf Ein gewisses Dreiecksstück keine Wirkung ausübt, gewiss andere Dreiecksstücke vorhanden sind, in Bezug auf welche die Wirkung statt findet, so kann man den allgemeinen Satz aussprechen, dass die Vermehrung der Anzahl der Bedingungsgleichungen immer die Gewichte der Dreiecksstücke vergrössert, und die Verminderung derselben immer die Gewichte verkleinert.

4.

Die eben erhaltenen Sätze ergaben sich ohne dass die Berücksichtigung der besonderen Form der Bedingungsgleichungen nöthig wurde, sie finden also bei jeder Bedingungsgleichung statt, mag die Form derselben sein wie sie will, sie haben daher in jedem Dreiecksnetze volle Geltung, wie gross oder wie klein auch die Winkel sein mögen, die darin vorkommen. Man wird weiter unten an Beispielen sehen, dass Seitengleichungen z. B. in welchen sehr kleine Winkel vorkommen, sehr günstige Wirkungen ausüben können. Behauptungen daher, dass solche Bedingungsgleichungen das Resultat unsicher oder gar unrichtig machen könnten, entbehren jedes Grundes. Aus demselben Grunde, dass die Vergrösserung der Gewichte nicht an die Form der Bedingungsgleichungen gebunden ist, folgt ferner dass es nunmehr nicht nothwendig ist in jedem Dreieck alle drei Winkel zu beobachten, so fern nur die Anlage des Netzes so eingerichtet wird, dass statt der fehlenden Winkelgleichungen eine genügende Anzahl von Seitengleichungen vorhanden sind. Die Weglassung einer Winkel- oder Richtungsbeobachtung

hie und da kann durch die Umstände geboten werden. Wenn von zwei Gegenständen *A* und *B* der erste vom zweiten aus gesehen werden kann, so kann gewiss auch der zweite vom ersten aus gesehen werden, aber es ereignet sich manchmal, dass von dem einen Punkte aus das Absehen gut ist, und gute Beobachtungen erwarten lässt, dass aber von dem anderen Punkte aus das Absehen schlecht ist, und nur schlechte Beobachtungen zu erwarten sind; man thut in diesem Falle besser die schlechten Beobachtungen unausgeführt zu lassen. Es lässt sich freilich behaupten, dass auch die schlechteste Beobachtung benutzt werden kann, wenn man ihr das richtige Gewicht beilegt, und hiegegen lässt sich theoretisch nichts einwenden, aber in der Praxis ist es immer unmöglich ein solches Gewicht mit der nöthigen Genauigkeit zu bestimmen, denn es fehlt stets hiezu die erforderliche Anzahl der Daten. Die Anwendung unrichtiger Gewichte kann aber das Resultat schädigen, und es ist daher stets vorzuziehen solche Fälle zu vermeiden.

5.

Es kann hierauf nothwendig werden, bei der Berechnung des Dreiecksnetzes Winkel hinzu zu ziehen, die nicht unmittelbar beobachtet sind, sondern aus den beobachteten berechnet werden müssen, aber hierin liegt nicht der mindeste Grund zur Befürchtung einer Ungenauigkeit, da oftmals die berechneten Winkel grössere Gewichte bekommen wie die beobachteten, und jedenfalls nach der Ausgleichung des Netzes für die Seiten, mag man sie aus beobachteten oder berechneten Winkeln ableiten, dieselben Werthe hervorgehen müssen.

6.

Kommen wir nun nach diesem auf die wesentlichsten Vorschriften, die dem zur Ausführung einer Haupttriangulation bestimmten Personal zu ertheilen sind, so möchten, nachdem die Ausdehnung der Triangulation, ihre Anfangs- und Endpunkte, so wie etwaige Zwischenpunkte, die sie berühren soll, bestimmt, auch die Zahl und Lage der zu messenden Grundlinien angegeben sind, ferner der ganze Arbeitsplan auf eine Zeit- und Kostenaufwand möglichst schonende Art festgesetzt, specielle Instruction über die Behandlung der Instrumente u. dgl. m. ertheilt worden sind, nur das Maximum des erlaubten mittleren Fehler der Beobachtungen an sich, den ich weiter unten den mittleren Fehler der

nackten Beobachtungen nennen werde, und das Minimum der zu bewirkenden Bedingungsgleichungen in Bezug auf die Anzahl der Dreieckspunkte vorzuschreiben sein. Vorschriften über das Minimum der Seiten der Dreiecke der verschiedenen Ordnungen sind unangemessen, da die Beschaffenheit des Terrains so sehr hiebei in Betracht kommt, und gewisse Gegenden zwar die Anlage von grossen Dreiecken erlauben, aber andere Gegenden die Anlage kleinerer Dreiecke zur Nothwendigkeit machen. Eher liesse sich ein Maximum der Seiten bestimmen, da bei allzu grosser Länge derselben leicht eine Undeutlichkeit in der Sichtbarkeit der Objekte eintreten kann, die auf die Güte der Beobachtungen nachtheilig einwirkt. Die Grösse der anzuwendenden Instrumente, und namentlich die optische Kraft der Fernröhre derselben ist hiebei in Betracht zu ziehen. Auch verlangen grössere Dreiecke grössere Genauigkeit der Winkelmessungen wie kleinere, um zu vermeiden, dass die mittleren Fehler solcher Seiten selbst nicht zu sehr anwachsen. Es möchten bei Triangulationen, die durch Gegenden geführt werden, die die Anlage sehr grosser Dreiecke erlauben, grössere und mit grösseren Fernröhren versehene Instrumente anzuwenden sein, wie bisher der Fall gewesen ist.

7.

Vorschriften über die erlaubte Fehlergränze der Seiten zu geben ist gänzlich unstatthaft, denn aus den oben erwähnten Bestimmungen über den mittleren Fehler der Beobachtungen und der Zahl der Bedingungsgleichungen folgen die mittleren Fehler der verschiedenen Seiten von selbst, und es ist nicht zu umgehen dass diese in gewissen, speciellen Fällen, die zu vermeiden unmöglich ist, grösser, hingegen in anderen Fällen kleiner werden. Die mittleren Fehler der Seiten, die man schliesslich erhält müssen als gut betrachtet werden, wenn nur die obigen Grundbestimmungen erfüllt sind. In Bezug auf den Anschluss der Resultate, die aus zwei verschiedenen Triangulationen für eine und dieselbe Dreiecksseite hervor gehen, darf nicht ausser Betracht gelassen werden, dass aus diesem Anschluss sich die Summe oder der Unterschied der zufälligen Fehler, die diese beiden Resultate besitzen, heraus stellt, und der zufällige Fehler irgend einer Bestimmung je nach den Umständen grösser oder kleiner werden kann, wie der mittlere Fehler.

Endlich ist zu bewirken, dass alle Dreieckspunkte auf möglichst sichere Art in der Erde festgelegt werden. Denn man kann ausserdem in den Fall kommen, nach Verlauf einer nicht grossen Anzahl von Jahren die Triangulation als kaum, oder gar nicht mehr vorhanden betrachten zu müssen, wovon leider Beispiele vorhanden sind.

8.

Bei der Bekanntmachung der Resultate einer Triangulation müssen, wie bisher geschehen ist, alle Beobachtungen, nebst dem Tage an welchem sie angestellt worden sind, einzeln angeführt, und der Name des Beobachters, so wie das angewandte Instrument angegeben werden. Es ist anzuempfehlen immer Richtungen zu beobachten, und die Beobachtungen vollständig anzuführen, nemlich jedem einzelnen Gyrus die Lage des Fernrohrs, ob links oder rechts, wenn es excentrisch ist, oder ob der Höhenkreis links oder rechts, ferner ob vorwärts oder rückwärts beobachtet worden ist, auch welchem Punkt des Horizontalkreises der angenommene Nullpunkt der Richtungen entspricht (letzterer nur in Graden und Minuten) anzugeben. Den Nullpunkt der Richtungen wählt man meines Erachtens nach am Zweckmässigsten so, dass diese die Azimuthe der Gegenstände, vom Südpunkt an nach Westen, nahe angeben; für die erste Richtung jedes Gyrus kann man demohngeachtet dieselbe Zahl von Secunden ansetzen. Die Sitte der ersten Richtung jeder Station den Werth Null zu geben kann zwar statt der Angabe der Azimuthe beibehalten werden, jedoch sollte man nicht, wie zu geschehen pflegt, in den Gyris, in welchen die erste Richtung nicht beobachtet worden ist, wieder mit Null anfangen, sondern die entsprechende Anzahl von Graden, Minuten und Secunden ansetzen, die der Richtung nahe entspricht, deren Werth man ein für alle Mal gleich Null angenommen hat.

Um jedem, der Nachrechnungen anstellen will, Anhaltspunkte darzubieten, halte ich es für das Angemessenste ausser den oben angeführten Einzelnheiten die Ausgleichungen auf den Stationen so anzugeben, wie ich es in dem Hauptbeispiel der Abhandlung von Art. 85 bis 88 für die Stationen (2) bis (5) gethan habe. Es wären demzufolge, ausser den oben angegebenen Einzelnheiten, die zwei Täfelchen für die zusammen gezogenen Beobachtungen, das Täfelchen für die (pp) (pp') etc. die Werthe der N, N', etc., das Täfelchen der daraus folgenden Coefficienten $(1, 1)$, $(2, 2, 1)$, etc. nebst den $(1, l)$, etc. bis (ll), die Werthe

der Grössen (1,1), (2,2,1), (3,3,2), etc. nebst (ll,n), so wie die der β''',γ''', β'',γ'', etc., die aus der Auflösung der Gleichungen hervorgehen, und im zweiten Theil der Auflösung gebraucht werden, so wie endlich die Werthe der $w(r)$ und $y(r)$ anzusetzen.

Im zweiten Theile der Auflösung sind zuerst die Bedingungsgleichungen, und die daraus folgenden Werthe der $F(I)$, $F(II)$, etc. anzugeben, und hierauf eine tabularische Aufstellung der Logarithmen der Differentialquotienten $q(r,I)_s$, $q(r,II)_s$, etc., so wie der Hülfsgrössen $\eta(r,I)_s$, $\eta(r,II)_s$, etc. und der $f(r,I)_s$, $f(r,II)_s$, etc. folgen zu lassen. Die Anführung der Werthe der $Q(r,I)_s$, $Q(r,II)_s$, etc. scheint mir überflüssig, da sie auf die einfachste Weise aus den $\eta(r,I)_s$, $\eta(r,II)_s$, etc. folgen. Es haben hierauf die Coefficienten der Endgleichungen (I,I), (I,II), etc. (II,II), etc. etc. und die Werthe der $(2)_1$, $(3)_1$, $(4)_1$, etc. $(3)_2$, $(4)_2$, etc. $(4)_3$, etc. etc.

und der

$$(II,II,1),\ (III,III,2), \text{ etc. bis } Fq$$

zu folgen, die sich durch die Auflösung dieser Gleichungen ergeben, worauf die Werthe der $z(r)$, $x(r)$ und der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung einer Richtung anzugeben sind, welcher letzte aus der Summe der Fehlerquadrate, deren Ausdruck $\Sigma(ll,n)+Fq$ ist, nach dem Art. 150 der Abhandlung zu berechnen ist.

Mit dem Vorstehenden ist noch nicht Alles gegeben, welches im jetzigen Zustande der Wissenschaft verlangt werden muss, sondern es kommt noch die Berechnung, wenigstens einiger, der Gewichte hinzu. Ich halte es für zu weit gegangen, wenn man verlangen wollte, dass in der Darlegung eines ausgeführten Dreiecksnetzes die Gewichte aller Stücke desselben angegeben werden müssten, und meine, dass es hinreichend ist, wenn die Gewichte einiger Stücke, die in der Nähe der Anfangs- und Endpunkte liegen, so wie überdiess die Gewichte solcher Stücke, die einige Verwickelung in der Anlage darbieten gegeben werden. Eine jedenfalls schätzbare Zugabe bildet indess die Angabe der Gewichte einer grösseren Anzahl von Stücken. Durch die Anführung der oben genannten Grössen, namentlich der $(2)_1$, etc. und der $(II,II,1)$, etc. setzt man jeden in den Stand, mit geringer Mühe die Gewichte so vieler Stücke berechnen zu können, wie er will. Dass der mittlere Fehler der Dreiecksstücke, deren Gewichte man berechnet hat, mit anzuführen ist, versteht sich von selbst.

9.

Es ist noch eine wichtige Frage zu behandeln, zumal mehrmals dagegen gefehlt worden ist. Es ist dieses die Frage, von welchen Grundsätzen man bei der wissenschaftlichen Beurtheilung eines ausgeführten Dreiecksnetzes auszugehen habe, um zu einer möglichst richtigen Würdigung der Resultate desselben zu gelangen, ohne einestheils den Werth desselben zu überschätzen, oder anderen Theils durch unrichtige Beurtheilung desselben ein Unrecht zu begehen. Ich meine, dass es selbstverständlich ist, dass man in dieser Hinsicht die einzelnen Operationen, die die Ausführung eines Dreiecksnetzes verlangt, sich vergegenwärtigen, und einzeln untersuchen muss. Diese Operationen lassen sich eintheilen in:

1) Die Anlage des Dreiecksnetzes, und die Verbindung der einzelnen Dreiecke mit einander;

2) Die Messungen und Beobachtungen, und zwar
   a) Die Messungen der Grundlinien;
   b) Die Messungen oder Beobachtungen der Richtungen;
   c) Die Ausführungen der Centrirungen;

3) Die Berechnung

und auf die Beschaffenheit der Ausführung dieser Operationen hat man bei der Prüfung sein Augenmerk zu richten. Sollten etwaige Mängel gefunden werden, so ist ihre Bedeutung zu berücksichtigen, und richtig zu würdigen. In Bezug hierauf kann Folgendes angemerkt werden:

ad 1) Sollte gefunden werden, dass an einer oder mehreren Stellen des Dreiecksnetzes eine zu geringe Anzahl von Controlen oder Bedingungsgleichungen vorhanden wären, so kann diesem in der Regel durch nachträgliche Einmessung neuer Richtungen, oder durch Einschaltung eines neuen Dreieckspunkts abgeholfen werden, aber es werden hiedurch manchmal nicht unbeträchtliche neue Kosten verursacht.

ad 2, *a*) Fände man, dass die Grundlinien nicht mit der erforderlichen Umsicht gemessen worden wären, so wäre dieser Uebelstand durch neue Messungen freilich zu entfernen, aber es würden wieder nicht unbedeutende nachträgliche Kosten erwachsen.

ad 2, *b*) Wären die Beobachtungen der Richtungen nicht mit erforderlicher Genauigkeit ausgeführt, so müsste diese ganze Hauptarbeit von Neuem vorgenommen werden.

ad 2, c) Etwaige Mängel in der Ausführung der Centrirungen zu heben, würde ohne grossen nachträglichen Kostenaufwand zu beseitigen sein, so ferne nur bei den Beobachtungen jeder Punkt dauernd fest gelegt worden ist.

ad 3) Fehler in der Berechnung lassen sich gemeiniglich mit weit geringeren Kosten, wie Mängel in den vorbenannten Punkten, entfernen, da blos Arbeiten im Zimmer in Betracht kommen.

10.

Zur Beurtheilung des Punkts 1) hat man vorzüglich auf die Anzahl und die Vertheilung der vorhandenen Bedingungsgleichungen zu sehen. Es können hiebei verschiedenartige Umstände eintreten. In einigen Gegenden, namentlich da wo man sehr grosse Dreiecke hat auswählen können, kann es nicht möglich geworden sein Diagonalen einzuschneiden, hier muss man sich mit der Winkelgleichung begnügen, die jedes einzelne Dreieck darbietet, aber diese auch fordern. Etwaige kleine Winkel, die in solchen Dreiecken vorkommen bilden nicht unbedingt einen Gegenstand des Tadels; es wird hierüber weiter unten das Nähere erklärt werden. Uebergrosse Seiten solcher Dreiecke könnten, aus dem oben angeführten Grunde wohl zu tadeln sein, namentlich wenn bei den Beobachtungen kein Heliotropenlicht oder zu kleine Instrumente angewandt worden sein sollten. In anderen Gegenden, wo namentlich bei Anwendung kleinerer Dreiecke Diagonalen haben eingeschnitten werden können, ist an die Zahl der Bedingungsgleichungen, die vorhanden sind, eine höhere Forderung zu stellen. Findet man die Zahl und die Vertheilung dieser so, dass für jeden hier in Betracht kommenden Dreieckspunkt wenigstens Eine Bedingungsgleichung vorhanden ist, so muss man schon die Anlage für gut anerkennen, sind noch mehr Bedingungsgleichungen vorhanden, so ist um so mehr die Anlage als gut zu bezeichnen.

11.

Die Beurtheilung der Ausführung des Punkts 1, a) ist die schwierigste, da von der Messung der Grundlinien nicht so viele Erfahrungen vorliegen, wie von den anderen bei einer Triangulation erforderlichen Operationen. Man muss, wenn die Beurtheilung ausführlich und gründlich sein soll, die einzelnen Messungen untersuchen, und hieraus sich ein Urtheil über die Sorgfältigkeit bilden, mit welcher sie ausgeführt

worden sind. Vorzugsweise ist hier darauf Acht zu haben, wie die Berücksichtigung der Temperatur der Messstangen in Folge der Einrichtung des Messapparats hat statt finden können, und wie sie statt gefunden hat. Auch die Vergleichung der Messstangen mit dem Grundmaasse ist in Bezug auf seine Einzelnheiten zu berücksichtigen. Es werden wohl bei dem gegenwärtigen Stande dieser Sache individuelle Ausichten nicht immer ganz zu vermeiden sein.

12.

Die Beurtheilung der Ausführung des Punkts 2, *b*) steht gegenwärtig auf fester Grundlage. Der mittlere Fehler der nackten Beobachtungen ist es, welcher hier den Ausschlag giebt. Die Berechnung dieses Fehlers, und die Vergleichung desselben mit demjenigen, welcher sich aus den anderen schon vorhandenen Triangulationen ergiebt, bildet einen sicheren Maassstab zur Beurtheilung des in Rede stehenden Punkts.

13.

Die Beurtheilung der Ausführung des Punkts 2, *c*) kann im Allgemeinen nicht direct ausgeführt werden, es wäre denn, dass man sich auf wenigstens einige der Stationen begäbe, dort die Centrirungen nachmässe, und hievon auf das Ganze schlösse. Die Theorie bietet aber hier ein indirectes Mittel dar. Der mittlere Fehler der nackten Beobachtung ist unabhängig von den Fehlern der Centrirung, der Phasen der Signale, u. s. w., aber der schliessliche mittlere Fehler schliesst diese Fehlerquellen in sich, die Vergleichung dieser beiden mittleren Fehler mit einander lässt also schon einen Schluss auf die Ausführung der Centrirungen u. s. w. zu.

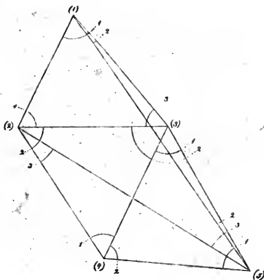
14.

Die Beurtheilung endlich der Ausführung des Punkts 3) ist einfach. Es ist erstlich zu untersuchen, ob in der Berechnung den theoretischen Bedingungen überall Gnüge geleistet worden ist, und zweitens ob die numerischen Rechnungen sorgfältig und richtig ausgeführt worden sind. Das in der Abhandlung entwickelte erste Verfahren bietet vermöge der Controlgleichungen, die es besitzt, und die in einem der unten folgenden Supplemente um Eine vermehrt werden sollen, ein angemessenes Hülfsmittel dazu dar.

§ 2. Specielle Betrachtungen.

15.

Ich beabsichtige hier an einigen Beispielen zu zeigen welche Wirkungen die Ausgleichungstheorie in gewissen Fällen ausübt. Ich habe dazu absichtlich fingirte Beispiele gewählt, da ich diese so stellen konnte, dass die grössere oder kleinere Wirkung, die die Bedingungsgleichungen ausüben, am deutlichsten hervortritt. Das erste Beispiel soll folgende Figur geben,



in welcher die Winkel wie folgt bezeichnet werden sollen

$$(2)(1)(3)=(1)_1\,,\quad (5)(3)(4)=(1)_3\,,\quad (3)(5)(4)=(1)_5$$
$$(5)(1)(3)=(2)_1\,,\quad (4)(3)(2)=(2)_3\,,\quad (3)(5)(1)=(2)_5$$
$$(1)(2)(3)=(1)_2\,,\quad (2)(3)(1)=(3)_3\,,\quad (3)(1)(2)=(3)_5$$
$$(3)(2)(4)=(2)_2\,,\quad (2)(4)(3)=(1)_4$$
$$(5)(2)(4)=(3)_2\,.\quad (3)(4)(5)=(2)_4$$

Ich werde ferner annehmen, dass diese Winkel selbst unabhängig von einander beobachtet oder gemessen worden seien, weil dieses für den hier zu verfolgenden Zweck auf eine etwas einfachere Rechnung führt. Der Fall übrigens, in welchem statt der Winkel die Richtungen

beobachtet worden sind, ist jenem ganz analog, und die sich ergebenden Gewichte werden von denen jenes Falles um wenig oder nichts verschieden sein.

16.

Fürs Erste soll angenommen werden, dass die beiden Diagonalen (2)(5) und (1)(5), die die Figur enthält, nicht eingeschnitten worden sind, und folglich das Netz aus den drei an einander gereihten Dreiecken (1)(2)(3), (2)(3)(4), (3)(4)(5) besteht.

Suchen wir hierauf die Gewichte der Winkel und verschiedener Seiten nach der Ausgleichung dieses Netzes.

Die Figur liefert nur drei Bedingungsgleichungen, welche alle Winkelgleichungen sind, nemlich

$$(1)_1 + (1)_2 + (3)_3 = 180^0$$
$$(2)_2 + (2)_3 + (1)_4 = 180$$
$$(1)_3 + (2)_4 + (1)_5 = 180$$

auf deren rechten Seiten in der Anwendung noch die sphärischen Ueberschüsse hinzu zu fügen wären, auf die es aber hier nicht ankommt. Die Tafel für die Differentialquotienten dieser Gleichungen steht wie folgt.

r	s	$q(r,I)_s$	$q(r,II)_s$	$q(r,III)_s$
1	1	1	—	—
1	2	1	—	—
2		—	1	—
1	3	—	—	1
2		—	1	—
3		1	—	—
1	4	—	1	—
2		—	—	1
1	5	—	—	1

und setzt man die ursprünglichen Gewichte aller Winkel einander gleich, und $=1$, so werden für alle Bedingungsgleichungen

$$\eta(r,I)_s = Q(r,I)_s = f(r,I)_s = q(r,I)_s$$
$$\eta(r,II)_s = Q(r,II)_s = f(r,II)_s = q(r,II)_s$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

die auch bei den unten folgenden Abänderungen des Beispiels statt finden werden.

17.

Suchen wir nun zuerst die Coefficienten der Endgleichungen, so ergeben sich

$$(I,I) = 3,\ (II.II) = 3,\ (III,III) = 3$$

und alle übrigen Coefficienten sind Null. Bezeichnet man ferner wie in der Abhandlung die Resultate der Substitution der beobachteten Werthe der Winkel in die Bedingungsgleichungen mit $F(I)$, $F(II)$, $F(III)$, so ergeben sich

$$\varphi_1 = \frac{F(I)}{3} = z(1)_1 = z(1)_2 = z(3)_3$$

$$\varphi_2 = \frac{F(II)}{3} = z(2)_2 = z(2)_3 = z(1)_4$$

$$\varphi_3 = \frac{F(III)}{3} = z(1)_3 = z(2)_4 = z(1)_5$$

Die Verbesserung eines jeden Winkels ist also mit entgegengesetztem Zeichen dem dritten Theil des ganzen Fehlers, den das betreffende Dreieck nach der Substitution der Beobachtungen zeigt, gleich; mit einem längst bekannten Satze übereinstimmend *). Man findet ferner leicht die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler, wenn sie wie oben mit W bezeichnet wird,

$$W = \tfrac{1}{3}\{F(I)^2 + F(II)^2 + F(III)^2\}$$

18.

Das zunächst Vorhergehende habe ich nur beiläufig angeführt, und werde mich hierauf zur Berechnung der Gewichte wenden. Ich bemerke dazu im Voraus, dass hier immer

$$k(r)_s = (M,r)_s = Q(M.r)_s$$

ist, und dass folglich die betr. Ausdrücke des Art. 143 der Abhandlung in die folgenden übergehen

$$R = \Sigma\{(M,1)_s^2 + (M,2)_s^2 + (M,3)_s^2 + \ldots\}$$

$$(I,M) = \Sigma\{(M,1)_s \,.\, q(1,I)_s \ + (M,2)_s \,.\, q(2,I)_s \ + (M,3)_s . q(3,I)_s \ + \ldots\}$$

$$(II,M) = \Sigma\{(M,1)_s \,.\, q(1,II)_s + (M,2)_s \,.\, q(2,II)_s + (M,3)_s . q(3,II)_s + \ldots\}$$

$$(III,M) = \Sigma\{(M,1)_s \,.\, q(1,III)_s + (M,2)_s \,.\, q(2,III)_s + (M,3)_s . q(3,III)_s + \ldots\}$$

etc. etc.

Wenden wir uns nun zuerst zur Ermittelung der Gewichte der Winkel, so lässt sich voraussehen, dass diese für jeden Winkel den-

*) Ich bemerke hiezu, dass dieser Satz nicht mehr statt findet, wenn man statt der unabhängigen Winkel die Richtungen beobachtet hat.

selben Werth erhalten werden; wir brauchen daher nur Einen Winkel z. B. $(1)_1$ zu betrachten. Hier wird

$$(M,1)_1 = 1$$

und alle übrigen Grössen dieser Gattung sind Null, es wird folglich auch

$$R = 1$$

Es wird ferner den vorstehenden Ausdrücken gemäss $(l,M) = 1$, und alle übrigen Grössen dieser Gattung werden auch Null. Folglich wird

$$S = \frac{(l,M)^2}{(l,l)} = \frac{1}{3}$$

und das Gewicht

$$P = \frac{3}{2}$$

welches Resultat für alle beobachteten Winkel gilt. Es folgt hieraus dass der mittlere Fehler eines jeden ausgeglichenen Winkels im Verhältniss wie

$$1 : \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

kleiner ist, wie das Gewicht des beobachteten Winkels, und da dieses Resultat erhalten worden ist, ohne eine Annahme über die Grösse der Winkel zu machen, so findet es in jedem, aus blos an einander gereihten Dreiecken bestehenden, Dreiecksnetze statt, die Winkel der verschiedenen Dreiecke mögen so gross oder so klein sein wie sie wollen.

19.

Gehen wir nun zur Ermittelung der Gewichte einiger der Seiten des Dreiecksnetzes über, so kann man im Voraus schon erkennen, dass hiebei ein anderes Verhalten eintritt. Diese Gewichte werden im Allgemeinen für die verschiedenen Seiten verschieden ausfallen, und namentlich werden sie desto kleiner werden, je mehr sie sich von der Grundlinie entfernen, auch kann man diese Gewichte nicht berechnen, ohne die Winkel des Dreiecksnetzes ihrer Grösse nach zu kennen. Seien jetzt im Dreiecksnetze, welches durch die Figur des Art 15 dargestellt ist, in den drei Dreiecken, die hier betrachtet werden, die Werthe der Winkel die folgenden, die den Dimensionen dieser Figur sehr nahe entsprechen.

$(1)_1 = 66^0$	$(2)_2 = 58^0$	$(1)_3 = 56^0$
$(1)_2 = 64$	$(2)_3 = 64$	$(2)_4 = 70$
$(3)_3 = 50$	$(1)_4 = 58$	$(1)_5 = 54$

20.

Es wird von nun an die Seite (1)(2) der Figur als Grundlinie angesehen, und es soll in Bezug auf diese zuerst das Gewicht der Seite

(2)(3) ermittelt werden. Ich werde indess hier, wie im Folgenden von dem Inhalt der Abhandlung eine Abweichnng machen und nicht die Gewichte der Seiten selbst, sondern die der ihnen zukommenden Logarithmen bestimmen, da diese Gewichte unabhängig von dem absoluten Maasse der Seiten sind. Für die oben genannte Seite bekommen wir demgemäss die Gleichung

$$\log(2)(3) = \log(1)(2) + \log\sin(1)_1 - \log\sin(3)_3$$

Nehmen wir ferner an, dass die siebente Decimale des Briggischen Logarithmus und die Secunde die Einheiten bilden sollen, so ist die erste Behandlung dieser Gleichung, die nemlich wodurch ihr Differential erlangt wird, genau dieselbe, die im Art. 92 der Abhandlung in Betreff der Seitengleichungen erklärt wurde, nur darf jetzt die resultirende Gleichung mit keinem von plus oder minus Eins verschiedenen Factor multiplicirt werden. Durch Zuziehung der oben angegebenen Werthe der Winkel bekommen wir daher

$$\Omega = +9.38\,\delta(1)_1 - 17.67\,\delta(3)_3$$

folglich

$$\left.\begin{aligned}(M,1)_1 &= +9.38\\ (M,3)_3 &= -17.67\end{aligned}\right\}\text{ und hieraus } R = 400.1$$

Es wird ferner $(I,M) = -8.29$, und die anderen Grössen dieser Gattung sind Null. Hiemit, und da im gegenwärtigen Falle die Coefficienten $(2)_1$, $(3)_1$, etc. etc., die sich aus der Auflösung der Endgleichungen ergeben, alle Null sind, erhält man

$$S = 22.9 \text{ und } P = 0{,}002652$$

21.

Suchen wir hierauf das Gewicht der Seite (3)(4) des zweiten Dreiecks, so ist die Grundformel

$$\log(3)(4) = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_1\sin(2)_2 - \log.\sin(3)_3\sin(1)_4$$

woraus

$$\Omega = +9.38\delta(1)_1 + 13.16\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3 - 13.16\delta(1)_4$$

also

$$\begin{aligned}(M,1)_1 &= +\ 9.38\\ (M,2)_2 &= +13.16\\ (M,3)_3 &= -17.67\\ (M,1)_4 &= -13.16\end{aligned}$$

und

$$(I,M) = -8.29,\ (II,M) = 0,\ (III,M) = 0$$

folgen. Es ergiebt sich hieraus

$$R = 746.5,\quad S = 22.9 \text{ und } P = 0{,}001382$$

22.

Zur Erlangung des Gewichts der Seite (4)(5) des dritten Dreiecks ergiebt sich

$$\log(4)(5) = \log(1)(2) + \log.\ \sin(1)_1 \sin(2)_2 \sin(1)_3$$
$$- \log.\ \sin(3)_3 \sin(1)_4 \sin(1)_5$$

$$\Omega = +9{,}38\delta(1)_1 + 13{,}16\delta(2)_2 + 14{,}20\delta(1)_3 - 17{,}67\delta(3)_3 - 13{,}16\delta(1)_4 - 15{,}30\delta(1)_5$$

$$(M,1)_1 = +\ 9{,}38,\ (M,3)_3 = -\ 17{,}67$$
$$(M,2)_2 = +\ 13{,}16,\ (M,1)_4 = -\ 13{,}16$$
$$(M,1)_3 = +\ 14{,}20,\ (M,1)_5 = -\ 15{,}30$$
$$R = 1182{,}3$$
$$(I,M) = -\ 8{,}29,\ (II,M) = 0,\ (III,M) = -\ 1{,}10$$
$$S = 23{,}3,\ P = 0{,}000863$$

23.

Betrachten wir diese Gewichte näher, so finden wir, dass sie von Dreieck zu Dreieck sehr nahe in dem Verhältniss von

$$1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3}$$

abnehmen, und diese Progression wird sich nahe in demselben Verhältniss fortsetzen, wenn mehr Dreiecke vorhanden sind, die nahe dieselben Dimensionen haben, wie die obigen, und die man gemeiniglich für die günstigsten hält. Wenn also ein Dreiecksnetz aus vielen solchen an einander gereihten Dreiecken besteht, so kann man sich schon eine Vorstellung davon machen, wie klein die Gewichte der Seiten der Dreiecke werden, die von der Grundlinie am Entferntesten liegen. Hieraus sieht man, wie unrichtig es ist, von jeder Dreiecksseite dieselbe Genauigkeit verlangen zu wollen.

Es lässt sich leicht beweisen, dass die obige Progression in einem Dreiecksnetze, welches aus lauter an einander gereihten, sehr nahe gleichseitigen Dreiecken besteht, strenge statt findet. Sei die Anzahl dieser Dreiecke n, und die zwei Winkel, die von jedem Dreiecke gebraucht werden um die Seiten fortgesetzt zu berechnen, (a), (a'), (b), (b'), etc. (n) (n'), die einander sehr nahe gleich sind, und von welchen (a) und (a') zum ersten Dreieck gehören, dessen eine Seite als Grundlinie be-

trachtet wird. Wegen der sehr nahen Gleichheit aller Winkel können wir in der Differentialgleichung die Coefficienten als einander völlig gleich betrachten, da ein kleiner Unterschied in diesen nur eine kleine Grösse erster Ordnung hervorbringen kann. Sei daher der gemeinschaftliche Werth dieser Coefficienten c, dann wird

$$\begin{aligned} \Omega = & \; c\delta(a) + c\delta(b) + \ldots + c\delta(n) \\ & - c\delta(a') - c\delta(b') - \ldots - c\delta(n') \end{aligned}$$

und es ergeben sich daher

$$\begin{aligned} (M.a) = (M.b) = \text{etc.} = (M.n) = & \; c \\ (M.a') = (M.b') = \text{etc.} = (M.n') = & - c \end{aligned}$$

folglich

$$R = 2nc^2$$

Da nun aus dem Täfelchen der Bedingungsgleichungen des Art. 16. und aus der vorstehenden Berechnung der Gewichte mehrerer Seiten sich leicht ergiebt, dass der Ausdruck eines jeden der Coefficienten $(I.M)$, $(II.M)$, etc. aus zwei gleichen, mit entgegengesetzten Zeichen behafteten Gliedern besteht, so werden

$$(I.M) = (II.M) = \text{etc.} = 0$$

und der allgemeine Ausdruck der gesuchten Gewichte wird

$$P = \frac{1}{R}$$

woraus hervorgeht, dass die Bedingungsgleichungen im gegenwärtigen Falle gar keine Wirkung auf die Gewichte ausüben*). Bezeichnen wir nun das gemeinschaftliche Gewicht der Logarithmen der beiden zu berechnenden Seiten des ersten Dreiecks mit P_1, das der beiden zu berechnenden Seiten des zweiten Dreiecks mit P_2, u. s. w., so geben die vorstehenden Entwickelungen sogleich

$$P_n = \frac{1}{2nc^2}, \; P_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)c^2}, \; P_{n-2} = \frac{1}{2(n-2)c^2},$$

$$\text{etc. } P_3 = \frac{1}{6c^2}, \quad P_2 = \frac{1}{4c^2}, \; P_1 = \frac{1}{2c^2},$$

folglich

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 : \text{etc.} = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \text{etc.}$$

w. z. b. w.

*) Dieser gehört also unter die Fälle, die oben im Art. 2 im Allgemeinen angedeutet worden sind.

24.

Um zur Kenntniss der mittleren Fehler zu gelangen, die in Folge der vorstehenden Ermittelungen den Dreiecksseiten beizulegen sind, bedarf es der Kenntniss des mittleren Fehlers der Beobachtungen, denen das Gewicht = 1 beigelegt worden ist, aber aus unserem Beispiele selbst kann man diesen nicht erlangen, da es ein fingirtes ist. Es hindert uns aber nichts aus irgend einer wirklich ausgeführten Triangulation diesen mittleren Fehler zu entnehmen, und hier anzuwenden.

Im Art. 151 der Abhandlung wurde in Bezug auf das Hauptbeispiel derselben der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung einer Richtung = 1",984 gefunden, und obgleich diese Bestimmung auf einer zu kleinen Anzahl von Beobachtungen beruht, als dass man sie für ganz sicher halten könnte, so will ich sie doch im gegenwärtigen Beispiel anwenden. Durch die Multiplication der eben angeführten Zahl mit $\sqrt{2}$ erhält man den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung eines Winkels = 2",806, aber es muss jedenfalls voraus gesetzt werden, dass man bei einer Triangulation, bei welcher Winkel gemessen werden, sich nicht begnügt jeden Winkel nur Einmal zu messen, sondern dass man das Resultat der gemessenen Winkel aus einer angemessenen Anzahl von einzelnen Messungen ableitet. Demzufolge will ich annehmen, dass jeder Winkel, von welchem in diesem Aufsatze die Rede ist, 25 Mal gemessen worden sei, woraus hervorgeht, dass der mittlere Fehler eines jeden der Winkel, welchen oben das Gewicht = 1 beigelegt wurde, dem fünften Theil des oben angegebenen Fehlers der einzelnen Winkelmessung gleich gesetzt werden muss. Es soll daher hier der mittlere Fehler der Winkelmessungen oder Beobachtungen, denen das Gewicht = 1 beigelegt worden ist,

$$= 0'',561$$

angenommen werden, und hieraus folgen die mittleren Fehler der Logarithmen der Seiten der verschiedenen Dreiecke, deren Gewichte im Vorhergehenden berechnet worden sind, bez.

$$= 10,9 \ , \ = 15,1 \ , \ = 21,5$$

in Einheiten der siebenten Decimale. Wenn die Längen der Seiten bekannt sind, so kann man hieraus die mittleren Fehler der Seiten selbst finden, denn nennt man die Länge irgend einer Seite ϱ, so wird

$$\delta\varrho = \frac{\varrho}{Mod.} \cdot \frac{\delta \log \varrho}{10000000}$$

wo $\delta \log \varrho$ in Einheiten der siebenten Decimale, gleich wie oben geschehen, auszudrücken ist.

Nehmen wir z. B. an, die Länge der Seite (1)(2) unserer Figur, die als Grundlinie in den Berechnungen der Gewichte angenommen worden ist, sei 20000 Meter, so findet man die Seiten

$$(2)(3) = 23581^m,\ (3)(4) = 23581^m,\ (4)(5) = 24441^m$$

und die mittleren Fehler dieser Seiten bez.

$$= 0^m,0594\ ,\ = 0^m,0829\ ,\ = 0^m,1210$$

oder nahe

$$= \frac{1}{398500}\ ,\ = \frac{1}{287600}\ ,\ = \frac{1}{202000}$$

der Längen derselben. Nehmen wir an, dass von der letzten dieser Seiten an, das Netz sich durch eine Anzahl sehr nahe gleichseitiger Dreiecke fortsetze, so wird der mittlere Fehler der zwei letzten Seiten des sechzehnten Dreiecks schon

$$= \frac{1}{87500}$$

der Länge derselben. Die mittleren Fehler der ersten Seiten sind hier sehr klein, aber es darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass die ganze Länge einer dieser Seiten als Grundlinie betrachtet worden ist. In der Praxis sind die gemessenen Grundlinien gemeiniglich weit kleiner wie die Seiten der grossen Dreiecke, und es werden daher in der Wirklichkeit die mittleren Fehler der Seiten wesentlich grösser ausfallen wie oben.

25.

Um diese Untersuchungen fortzusetzen sollen jetzt die Gewichte der Diagonalen (2)(4) und (1)(5) nebst denen der Winkel, die sie mit den anliegenden Seiten machen, ermittelt werden. Da diese Winkel bis jetzt noch zu den nicht beobachteten gehören, so bedarf die Berechnung der Gewichte derselben einer besonderen Vorbereitung. Aus den Dreiecken (3)(4)(5), (2)(4)(5), (2)(3)(4) der Figur bekommt man

$$1 = \frac{\sin (1)_5 \sin (3)_2 \sin (2)_3}{\sin (1)_3 \sin \{(3)_2 + (1)_4 + (2)_4\} \sin (2)_5}$$

die nachdem sie in Bezug auf $(3)_2$ aufgelöst worden ist,

$$\operatorname{tg} (3)_2 = \frac{\sin (1)_3 \sin (2)_5 \sin \{(1)_4 + (2)_4\}}{\sin (1)_5 \sin (2)_3 - \sin (1)_3 \sin (2)_5 \cos \{(1)_4 + (2)_4\}}$$

giebt. Hieraus erhielt ich

$$(3)_2 = 25^0\ 31',75$$

und hierauf durch die Gleichung $(3)_5 = (3)_2 + (1)_4 + (2)_4 + (1)_5 - 180^\circ$

$$(3)_5 = 27^\circ\ 31',75$$

Behandelt man nun zuerst die erste der obigen Gleichungen als ob sie eine der Bedingungsgleichungen wäre, so bekommt man

$$0 = -(1.11914)\delta(2)_2 + (1.64428)\delta(3)_2 - (1.15234)\delta(1)_3$$
$$+ (1.01153)\delta(2)_3 + (1.62617)\{\delta(3)_2 + \delta(1)_4 + \delta(2)_4\} + (1.18461)\delta(1)_5$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten sind, und löst man diese Gleichung in Bezug auf $\delta(3)_2$ auf, so erhält man

$$\Omega = \delta(3)_2 = +0.15233\delta(2)_2 + 0.16444\delta(1)_3 - 0.11890\delta(2)_3$$
$$- 0.48958\delta(1)_4 - 0.48958\delta(2)_4 - 0.17712\delta(1)_5$$

also

$$(M,2)_2 = +0.1523,\ (M,2)_3 = -0.1189,\ (M,2)_4 = -0,4896$$
$$(M,1)_3 = +0.1644,\ (M,1)_4 = -0.4896,\ (M,1)_5 = -0.1771$$

und hieraus folgt $R = 0.5751$. Ferner erhält man

$$(I,M) = 0,\ (II,M) = -0.4562,\ (III,M) = -0.5023$$

welche $S = 0.1535$, und endlich

$$P = 2.372$$

geben, welches das Gewicht des Winkels $(3)_2$ ist.

26.

Um das Gewicht des Winkels $(3)_5$ zu finden, bediene ich mich der Gleichung

$$\delta(3)_5 = \delta(3)_2 + \delta(1)_4 + \delta(2)_4 + \delta(1)_5$$

aus welcher ich durch den Ausdruck für $\delta(3)_2$ des vor. Art. diese Aenderung eliminire. Es wird also hier

$$\Omega = \delta(3)_5 = +0.15233\,\delta(2)_2 + 0.16444\,\delta(1)_3 - 0.11890\,\delta(2)_3$$
$$+ 0.51042\,\delta(1)_4 + 0.51042\,\delta(2)_4 + 0.82288\,\delta(1)_5$$

folglich

$$(M,2)_2 = +0.1523,\ (M,2)_3 = -0.1189,\ (M,2)_4 = +0.5104$$
$$(M,1)_3 = +0.1644,\ (M,1)_4 = +0.5104,\ (M,1)_5 = +0.8229$$
$$R = 1.2708$$
$$(I,M) = 0,\ (II,M) = +0.5438,\ (III,M) = +1.4977$$
$$S = 0.8463$$
$$P = 2.356$$

welches das Gewicht des Winkels $(3)_5$ ist. Es verdient angemerkt zu werden, dass die Gewichte der beiden berechneten Winkel $(3)_2$ und

$(3)_5$ beträchtlich, im Verhältnisse nahe wie $1:1{,}6$ grösser sind wie die Gewichte der beobachteten Winkel deren jedes $= 1.5$ ist.

27.

Zur Berechnung des Gewichts der Diagonale (2)(5) giebt die Figur zuerst

$$\log(2)(5) = (\log(1)(2) + \log.\sin(1)_1 \sin\{(1)_3 + (2)_3\} - \log.\sin(3)_3 \sin(3)_5$$

woraus man durch die Differentiation

$$\Omega = +\,9.374\,\delta(1)_1 - 12.156\,\{\delta(1)_3 + \delta(2)_3\}$$
$$-\,17.667\,\delta(3)_3 - 40.396\,\delta(3)_5$$

findet.

Da aber $(3)_5$ kein beobachteter Winkel ist, so muss dessen Variation durch die im vor. Art. dafür erhaltene Gleichung eliminirt werden. Nachdem dieses geschehen ist, wird

$$\Omega = +9.374\delta(1)_1 - 6.154\delta(2)_2 - 18.799\delta(1)_3 - 7.353\delta(2)_3 - 17.667\delta(3)_3$$
$$-20.619\delta(1)_4 - 20.619\delta(2)_4 - 33.242\delta(1)_5$$

Es wird daher im jetzigen Falle

$$(M,1)_1 = +\;\;9.374\;,\;(M,1)_4 = -\;20.619$$
$$(M,2)_2 = -\;\;6.154\;,\;(M,2)_4 = -\;20.619$$
$$(M,1)_3 = -\;18.799\;,\;(M,1)_5 = -\;33.242$$
$$(M,2)_3 = -\;\;7.353$$
$$(M,3)_3 = -\;17.667$$
$$R = 2800.6$$
$$(I,M) = -\;8.293\;,\;(II,M) = -\;34.126\;,\;(III,M) = -\;72.660$$
$$S = 2171.1$$
$$P = 0.001588$$

für das Gewicht von log (2)(5). Dieses ist merklich grösser wie das Gewicht des log der Seite (3)(4).

28.

Behandeln wir nun die Diagonale (1)(5) eben so, so bekommen wir nach und nach

$$1 = \frac{\sin\{(1)_3+(2)_3+(3)_3+(3)_5\}\sin(1)_3 \sin(1)_4 \sin(1)_5}{\sin(2)_3 \sin(1)_1 \sin(2)_5 \sin(2)_4}$$

$$\operatorname{tg}(2)_5 = \frac{\sin(1)_2 \sin(1)_4 \sin(1)_5 \sin\{(1)_3+(2)_3+(3)_3\}}{\sin(1)_1 \sin(2)_3 \sin(2)_4 - \sin(1)_3 \sin(1)_4 \sin(1)_5 \cos\{(1)_3+(2)_3+(3)_3\}}$$

$$(2)_5 = 4^\circ 35' 5'',\;(2)_1 = 5^\circ 24' 55''$$

$$0 = -(0.97193)\,\delta(1)_1 + (1.01153)\,\delta(1)_2 - (1.11914)\,\delta(2)_2$$
$$-(2.34656)\{\delta(1)_3 + \delta(2)_3 + \delta(3)_3 + \delta(2)_5\} + (1.11914)\,\delta(1)_4$$
$$-(0.88442)\,\delta(2)_4 + (1.18461)\,\delta(1)_5 - (2.41922)\,\delta(2)_6$$

$$\Omega = \delta(2)_5 = -0.01934\,\delta(1)_1 + 0.02119\,\delta(1)_2 - 0.02715\,\delta(2)_2$$
$$-0.45828\,\delta(1)_3 - 0.45828\,\delta(2)_3 - 0.45828\,\delta(3)_3$$
$$+0.02715\,\delta(1)_4 - 0.01581\,\delta(2)_4 + 0.03156\,\delta(1)_5$$

$(M,1)_1 = -0.0193$, $(M,1)_3 = -0.4583$, $(M,1)_4 = +0.0271$
$(M,1)_2 = +0.0212$, $(M,2)_3 = -0.4583$, $(M,2)_4 = -0.0158$
$(M,2)_2 = -0.0271$, $(M,3)_3 = -0.4583$, $(M,1)_5 = +0.0316$

$$R = 0.6338$$

$(I,M) = -0.4563$, $(II,M) = -0.4583$, $(III,M) = -0.4424$

$$S = 0.2046$$
$$P = 2.331$$

welches das Gewicht des Winkels $(2)_5$ ist.

29.

Ferner

$$\Omega = \delta(2)_1 = -\delta(1)_3 - \delta(2)_3 - \delta(3)_3 - \delta(2)_5$$

und nach der Elimination von $\delta(2)_5$ durch die betr. Gleichung des vor. Art.

$(M,1)_1 = +0.0193$, $(M,1)_3 = -0.5417$, $(M,1)_4 = -0.0271$
$(M,1)_2 = -0.0212$, $(M,2)_3 = -0.5417$, $(M,2)_4 = +0.0158$
$(M,2)_2 = +0.0271$, $(M,3)_3 = -0.5417$, $(M,1)_5 = -0.0316$

$$R = 0.8840$$

$(I,M) = -0.5437$, $(II,M) = -0.5417$, $(III,M) = -0.5576$

$$S = 0.3000$$
$$P = 1.712$$

für das Gewicht des Winkels $(2)_1$. Hier finden wir wieder die Gewichte der beiden berechneten Winkel grösser als das Gewicht der beobachteten, und zwar das des Einen im Verhältniss wie

$$1 : 1{,}554$$

und das des Anderen wie

$$1 : 1{,}142$$

30.

Ferner wird

$$\log(1)(1') = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_2 \sin\{(1)_3 + (2)_3 + (3)_3\} - \log.\sin(3)_3 \sin(2)_5$$

$$\Omega = +\ 10.269\,\delta(1)_2 - 119.408\,\{\delta(1)_3 + \delta(2)_3 + \delta(3)_3\}$$
$$-\ 17.667\,\delta(3)_3 - 262.56\,\delta(2)_5$$

und nach der Elimination von $\delta(2)_5$

$$(M,1)_1 = +\ 5.078\ ,\ (M,1)_3 = +\ \ 0.914\ ,\ (M,1)_4 = -\ 7.127$$
$$(M,1)_2 = +\ 4.706\ ,\ (M,2)_3 = +\ \ 0.914\ ,\ (M,2)_4 = +\ 4.152$$
$$(M,2)_2 = +\ 7.127\ ,\ (M,3)_3 = -\ 16.753\ ,\ (M,1)_5 = +\ 8.287$$
$$R = 517{,}5$$
$$(I,M) = -\ 6.969\ ,\ (II,M) = +\ 0.914\ ,\ (III,M) = -\ 3.221$$
$$S = 20.0$$
$$P = 0.002010$$

für das Gewicht des log. der Seite (1)(5), und dieses Gewicht liegt also zwischen den Gewichten der logg. der Seiten (2)(3) und (3)(4) nahe in der Mitte; es ist grösser wie das Gewicht der kürzeren Diagonale (2)(5). Da die Linie (1)(5) die längste ist, die man in der Figur von einem Dreieckpunkt zu einem andern ziehen kann, und durch zwei sehr kleine Winkel mit den weit kürzeren Dreiecksseiten (1)(3) und (3)(5) verbunden ist, so könnte man leicht im Voraus die Ansicht fassen, dass sowohl das Gewicht dieser Linie, wie die Gewichte der beiden genannten, anliegenden Winkel sehr klein werden müssten. Die vorstehenden Rechnungen geben aber ein entgegengesetztes Resultat, und zeigen also, wie sehr man sich in solchen, auf keine mathematische Untersuchungen gegründeten Ansichten irren kann.

31.

Es soll nun angenommen werden, dass ausser den bisher als beobachtet angenommenen Winkeln, auch der Winkel (4)(2)(5), der in der Figur mit $(3)_2$ bezeichnet worden ist, beobachtet sei. Diese Annahme fügt den drei bisher vorhandenen Bedingungsgleichungen eine vierte hinzu, die keine andere ist, wie die erste Gleichung des Art. 25. Da die Coefficienten der Variationen dieser Gleichung schon dort berechnet worden sind, so können wir das neue Täfelchen der Differentialquotienten sogleich aufstellen, zur einfacheren Behandlung dieser Gleichung sollen jedoch alle Coefficienten derselben mit der Zahl 10 dividirt werden. Somit erhalten wir das folgende Täfelchen.

r	s	$q(r.I)_s$	$q(r.II)_s$	$q(r.III)_s$	$\log q(r.IV)_s$	$q(r.IV)_s$
1	1	1	—	—	—	—
1	2	1	—	—	—	—
2		—	1	—	9.51708n	−0.3289
3		—	—	—	0.33429	+2.1592
1	3.	—	—	1	9.55028n	−0.3550
2		—	1	—	9.40947	+0.2567
3		1	—	—	—	—
1	4	—	1	—	0.02411	+1.0571
2		—	—	1	0.02411	+1.0571
1	5	—	—	1	9.58255	+0.3824

Hieraus bekommt man folgende Werthe der Coefficienten der Endgleichungen,

$$(I,I) = 3\ ,\ (I,II) = 0\ ,\ (I,III) = 0\ ,\ (I,IV) = 0$$
$$(II.II) = 3\ ,\ (II,III) = 0\ ,\ (II,IV) = +\ 0.9849$$
$$(III,III) = 3\ ,\ (III,IV) = +\ 1.0845$$
$$(IV,IV) = 7.3434$$

und diese geben

$$(2)_1 = 0\ ,\quad (3)_1 = 0\ ,\quad (4)_1 = 0$$
$$(3)_2 = 0\ ,\quad (4)_2 = -\ (9.51627)$$
$$(4)_3 = -\ (9.55811)$$
$$(I,I) = 3\ ,\ (II,II,1) = 3\ ,\ (III,III,2) = 3\ ,\ (IV,IV,3) = 6.6281$$

32.

Es ist klar, dass hierauf die Gewichte der Stücke des Dreiecks (1)(2)(3) sich nicht ändern können, da dieses Dreieck an der hinzugekommenen Bedingungsgleichung keinen Theil hat. Untersuchen wir aber die Gewichte einiger anderen Winkel und Seiten. Zuerst soll das Gewicht des Winkels $(3)_2$ berechnet werden. Hiefür wird

$$(M,3)_2 = 1\ ,\ R_1 = 1\ ,\ (IV,M) = (IV,M,3) = +\ 2.1592$$
$$S = 0.7034\ ,\qquad P = 3.372$$

Dieses Gewicht hat sich durch die hinzugekommene Bedingungsgleichung im Verhältniss von

$$1 : 1{,}421$$

vergrössert.

33.

Für das Gewicht von $(3)_5$ könnten wir jetzt die Gleichung

$$\delta(3)_5 = \delta(3)_2 + \delta(1)_4 + \delta(2)_4 + \delta(1)_5$$

anwenden, aber es ist eben so richtig, und einfacher dieselbe Gleichung anzuwenden, die im Art. 26 nach der Elimination von $\delta(3)_2$ gedient hat, auch hier zu gebrauchen. Alle dort berechneten Zahlen bleiben bis auf S und P dieselben, es kommt aber

$$(IV,M) = +1.3049$$

hinzu, und hiemit werden

$$(I,M) = 0\ ,\ (II,M,1) = +0.5438\ ,\ (III,M,2) = +1.4977$$

wie dort, hingegen

$$(IV,M,3) = +0.5849\ ,\ S = 0.8979$$
$$P = 2.682$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.138$$

grösser wie vorher.

34.

Berechnung des Gewichts des Winkels $(2)_2$.

$$(M,2)_1 = 1\ ,\ R = 1\ ,\ (II,M) = 1\ ,\ (IV,M) = -0.3289$$
$$(II,M,1) = 1\ ,\ (IV,M,3) = -0.6572\ ,\ S = 0.3985$$
$$P = 1.663$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.108$$

grösser wie vorher.

35.

Gewicht des Winkels $(1)_4$.

$$(M,1)_4 = 1\ ,\ R = 1\ ,\ (II,M) = 1\ ,\ (IV,M) = +1.0571$$
$$(II,M,1) = 1\ ,\ (IV,M,3) = +0.7308\ ,\ S = 0.4139$$
$$P = 1.706$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.137$$

grösser wie vorher.

36.

Gewicht der Seite (2)(5). Zu den Zahlen des Art. 27 kommt

$$(IV,M) = -49.52$$

hinzu, und es werden demzufolge

$$(I,M) = -8.293\ ,\ (II,M,1) = -34.126\ ,\ (III,M,2) = -72,660$$
$$R = 2800.6$$

gleichwie a. a. O., aber ausserdem

$$(IV,M,3) = -12.04$$

und hiemit bekommt man

$$S = 2193.0$$
$$P = 0.001646$$

im Verhältniss von

$$1 : 1,036$$

grösser wie vorher.

37.

Gewicht der Seite (4)(5). Ausser den Zahlen des Art. 22 wird hier noch

$$(IV,M) = -29.13\,,\ (IV,M,3) = -28.73$$
$$S = 147,9$$
$$P = 0.000967$$

im Verhältniss von

$$1 : 1,120$$

grösser wie vorher. Man sieht hieraus, dass die neu hinzugekommene Bedingungsgleichung alle Gewichte vergrössert, und im gegenwärtigen Falle ist die Vergrösserung am Ansehnlichsten bei dem Winkel $(3)_2$, der als beobachteter Winkel hinzugekommen ist.

38.

Nehmen wir jetzt an, dass ausser den bisher als beobachtet betrachteten Winkeln, auch der Winkel $(2)(5)(3) = (3)_5$ beobachtet worden ist, und untersuchen wir wieder die Gewichte die hieraus hervorgehen. Die neue Bedingungsgleichung ist nun

$$0 = \delta(3)_2 + \delta(1)_4 + \delta(2)_4 + \delta(1)_5 - \delta(3)_5$$

und das Täfelchen der Differentialquotienten wird in Folge dessen das folgende

r	s	$q(r.I)_s$	$q(r.II)_s$	$q(r.III)_s$	$\log q(r.IV)_s$	$q(r.IV)_s$	$q(r.V)_s$
1	1	1	—	—	—	—	—
1	2	1	—	—	—	—	—
2		—	1	—	9.51708n	−0.3289	—
3		—	—	—	0.33429	+2.1592	1
1	3	—	—	1	9.55028n	−0.3550	—
2		—	1	—	9.40947	+0.2567	—
3		1	—	—	—	—	—
1	4	—	1	—	0.02411	+1.0571	1
2		—	—	1	0.02411	+1.0571	1
1	5	—	—	1	9.58255	+0.3824	1
3		—	—	—	—	—	−1

Die Coefficienten der Endgleichungen, die hieraus folgen, sind in der folgenden Tafel zusammengestellt,

i	(i,I)	(i,II)	(i,III)	(i,IV)	(i,V)
I	3	0	0	0	0
II		3	0	+ 0.9849	+ 1
III			3	+ 1.0845	+ 2
IV				7.3434	+ 4.6558
V					5

und hieraus bekommt man

$$(2)_1 = 0\,,\ (3)_1 = 0\,,\ (4)_1 = 0\,,\quad (5)_1 = 0$$
$$(3)_2 = 0\,,\ (4)_2 = -\,(9.51627),\ (5)_2 = -\,(9.52288)$$
$$(4)_3 = -\,(9.55811),\ (5)_3 = -\,(9.82391)$$
$$(5)_4 = -\,(9.73546)$$
$$(I,I)=3,\ (II,II,1)=3,\ (III,III,2)=3,\ (IV,IV,3)=6.6281,\ (V,V,4)=1.3731$$

39.

Es sollen jetzt wieder die Gewichte derselben Stücke des Netzes berechnet werden, wie im vorhergehenden Falle.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Zu den Zahlenwerthen des Art. 32 kommt hinzu

$$(V,M) = 1$$

und hieraus folgen

$$(V,M,4) = -\,0{,}1742\,,\ S = 0{,}7255$$
$$P = 3.644$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.081$$

grösser wie vorher.

40.

Gewicht des Winkels $(3)_5$. Hiefür bekommen wir jetzt, nachdem dieser Winkel zu den beobachteten gehört,

$$(M,3)_5 = 1\,,\ R = 1\,,\ (V,M) = (V,M,4) = -\,1\,,\ S = 0.7283$$
$$P = 3.681$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.373$$

grösser wie vorher.

41.

Gewicht des Winkels $(2)_2$. Hier findet man ausser den Zahlenwerthen des Art. 34

$$(V,M) = 0$$
$$(V,M,4) = + 0.0240 \, , \; S = 0.3989$$
$$P = 1.664$$

Der Zuwachs dieses Gewichts ist sehr klein.

42.

Gewicht des Winkels $(1)_4$. Zu den Zahlenwerthen des Art. 35 kommt hinzu

$$(V,M) = 1$$
$$(V,M,4) = + 0.2702 \, , \; S = 0.4671$$
$$P = 1.877$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.100$$

grösser wie vorher.

43.

Gewicht der Seite (2)(5). Zu Art. 36 kommt hinzu

$$(V,M) = - 74.48$$
$$(V,M,4) = - 8.11 \, , \; S = 2240.9$$
$$P = 0.001786$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.086,$$

grösser wie vorher.

44.

Gewicht der Seite (4)(5). Zu den Zahlen des Art. 37 kommen hinzu

$$(V,M) = - 28.46$$
$$(V,M,4) = - 12.10 \, , \; S = 254.5$$
$$P = 0.001078$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.115$$

grösser wie vorher. Die zweiseitige Beobachtung der Diagonale hat also hier die Gewichte, die aus der einseitigen Beobachtung derselben hervorgehen, mit Ausnahme des Gewichts der hinzugekommenen Beobachtung, nur wenig vergrössert.

45.

Um endlich auch die Wirkung einer Bedingungsgleichung numerisch darlegen zu können, in welcher sehr kleine Winkel vorkommen, soll noch angenommen werden, dass der Winkel $(5)(1)(3) = (2)_1$ gemessen worden ist, welcher nach dem Art. 28 nur $5^0\ 25'$ beträgt.

Die Bedingungsgleichung, die hieraus entsteht, ist schon im Art. 28 aufgestellt, und das neue Täfelchen der Differentialquotienten wird daher, nachdem die neue Bedingungsgleichung mit der Zahl 200 dividirt und $\delta(2)_5$ daraus eliminirt worden ist, das folgende.

r	s	$q(r.I)_s$	$q(r.II)_s$	$q(r.III)_s$	$\log q(r.IV)_s$	$q(r.IV)_s$	$q(r.V)_s$	$\log q(r.VI)_s$	$q(r.VI)_s$
1	1	1	—	—	—	—	—	8.67090n	−0.0469
2		—	—	—	—	—	—	0.38440	+2.4233
1	2	1	—	—	—	—	—	8.71050	+0.0513
2		—	1	—	9.51708n	−0.3289	—	8.81811n	−0.0658
3		—	—	—	0.33429	+2.1592	1	—	—
1	3	—	—	1	9.55028n	−0.3550	—	0.11819	+1.3128
2		—	1	—	9.40947	+0.2567	—	0.11819	+1.3128
3		1	—	—	—	—	—	0.11819	+1.3128
1	4	—	1	—	0.02411	+1.0571	1	8.81811	+0.0658
2		—	—	1	0.02411	+1.0571	1	8.58339n	−0.0383
1	5	—	—	1	9.58255	+0.3824	1	8.88358	+0.0765
3		—	—	—	—	—	−1	—	—

Zu den Coefficienten der Endgleichungen des Art. 38 kommen jetzt die folgenden hinzu.

$$(I, VI) = +1.3172\ ,\ (II, VI) = +1.3128\ ,\ (III, VI) = +1.3510$$
$$(IV, VI) = -0.0492\ ,\ (V, VI) = +0.1040\ ,\ (VI, VI) = 11.0631.$$

und die für die folgenden Rechnungen erforderlichen Hülfsgrössen sind in vollständiger Zusammenstellung die folgenden.

$$(2)_1 = 0, (3)_1 = 0, (4)_1 = 0\ ,\quad (5)_1 = 0\ ,\quad (6)_1 = -(9.64254)$$
$$(3)_2 = 0, (4)_2 = -(9.51627), (5)_2 = -(9.52288), (6)_2 = -(9.64107)$$
$$(4)_3 = -(9.55811), (5)_3 = -(9.82391), (6)_3 = -(9.65354)$$
$$(5)_4 = -(9.73546), (6)_4 = +(9.16475)$$
$$(6)_5 = +(9.71209)$$
$$(I, I) = 3\ ,\ (II, II, 1) = 3\ ,\ (III, III, 2) = 3$$
$$(IV, IV, 3) = 6.6281\ ,\ (V, V, 4) = 1.3731\ ,\ (VI, VI, 5) = 8.7956$$

46.

Berechnen wir nun wieder die Gewichte derselben Stücke des Dreiecksnetzes, wie vorher, aber mit Hinzufügung der Stücke des Dreiecks (1)(2)(3).

Gewicht des Winkels $(1)_1$. Hier erhalten wir

$$\Omega = \delta(1)_1 \,,\; (M.1)_1 = 1$$

und alle übrigen Grössen dieser Gattung sind Null.
Ferner

$$R = 1$$

$$(I.M) = 1 \,.\; (VI.M) = -\,0.0469$$

und hieraus

$$(VI.M.5) = -\,0.4859 \,,\; S = 0.3601$$

$$P = 1.563$$

im Verhältniss von 1 : 1.042 grösser wie das ursprüngliche Gewicht.

47.

Gewicht des Winkels $(1)_2$.

$$(M.1)_2 = 1 \,,\; (I.M) = 1 \,,\; (VI.M) = +\,0.0513 \,,\; R = 1$$

$$(VI.M.5) = -\,0.3877 \,,\; S = 0.3504$$

$$P = 1.540$$

im Verhältniss von 1 : 1.037 grösser wie das ursprüngliche Gewicht. Es ist leicht einzusehen, dass die Gewichte dieser beiden Winkel durch die hinzugekommene Beobachtung des Winkels $(2)_1$ nicht sonderlich vergrössert werden können.

48.

Gewicht des Winkels $(3)_3$. Man findet hier

$$(M.3)_3 = 1 \,,\; (I.M) = 1 \,,\; (VI.M) = +\,1.3128 \,,\; R = 1$$

$$(VI.M.5) = +\,0.8738 \,,\; S = 0.4201$$

$$P = 1.725$$

im Verhältniss von 1 : 1.150 grösser wie das ursprüngliche Gewicht. Die Vergrösserung dieses Gewichts ist schon bedeutender, wie die der beiden vorher betrachteten.

49.

Gewicht des hinzugekommenen, beobachteten Winkels $(2)_1$. Hier sind

$$(M.2)_1 = 1 \,,\; (VI.M) = (VI.M.5) = +\,2.4233$$

$$R = 1 \,,\; S = 0.6676$$

$$P = 3.009$$

im Verhältniss von 1 : 1.758 grösser wie das ursprüngliche, im Art. 29 berechnete, Gewicht. Die Vergrösserung des Gewichts dieses kleinen Winkels ist also bedeutend.

30.

Knüpfen wir hieran sogleich die Berechnung des Gewichts des bis jetzt noch nicht beobachteten Winkels $(2)_5$, der zufolge der Art. 28 $= 4^0 45'$ ist. Wir könnten hier zur Berechnung die Gleichung für $\Omega = \delta(2)_5 =$ etc. des Art. 28 anwenden, allein es ist einfacher sich der folgenden zu bedienen,

$$\Omega = \delta(2)_1 + \delta(1)_3 + \delta(2)_3 + \delta(3)_3$$

die auf einfache Weise aus dem Dreiecke (1)(3)(5) entspringt. Diese Gleichung giebt

$$(M,2)_1 = 1\ ,\ (M,1)_3 = 1\ ,\ (M,2)_3 = 1\ ,\ (M,3)_3 = 1\ ,\ R = 4$$

Ferner

$$(I,M) = 1\ ,\ (II,M) = 1\ ,\ (III,M) = 1\ ,\ (IV,M) = -\ 0.0983\ ,\ (V,M) = 0$$
$$(VI,M) = +\ 6.3617$$

und hieraus

$$(II,M,1) = 1\ ,\ (III,M,2) = 1\ ,\ (IV,M,3) = -\ 0.7881\ ,$$
$$(V,M,4) = -\ 0.5715\ ,\ (VI,M,5) = +\ 4.6251\ ,\ S = 3.7636$$
$$P = 4.231$$

im Verhältniss von 1 : 1.814 grösser wie das im Art. 28 berechnete ursprüngliche Gewicht dieses Winkels. Zu bemerken ist hier, dass wieder nicht nur das Gewicht des berechneten Winkels $(2)_5$ grösser ist wie das des beobachteten $(2)_1$, sondern das Verhältniss der Vergrösserung desselben grösser ist, wie das jenes.

31.

Zur Berechnung des Gewichts des log. der Seite (1)(5) dient wieder die im Art. 30 erhaltene Gleichung, nachdem die Variation $\delta(2)_5$ daraus eliminirt worden ist. Dieses ist a. a. O. schon geschehen, und die dortigen numerischen Werthe gelten auch hier, nur dass

$$(IV,M) = -\ 8.748\ ,\ (V,M) = -\ 11.262\ ,\ (VI,M) = -\ 21.320$$

hinzu kommen. Es werden nun hier

$$(I,M) = -\ 6.969\ ,\ (II,M,1) = +\ 0.914\ ,\ (III,M,2) = -\ 3.221$$
$$(IV,M,3) = -\ 7.884\ ,\ (V,M,4) = -\ 3.133\ ,\ (VI,M,5) = -\ 21.009$$
$$S = 98.7$$
$$P = 0.002388$$

Dieses Gewicht hat sich im Verhältniss von 1 : 1.188 gegen das a. a. O. berechnete vergrössert. Also ungeachtet der kleinen Winkel, auf welchen die neu hinzugekommene Bedingungsgleichung beruht, hat diese doch

wesentlich zur Vergrösserung der Gewichte der zunächst damit in Verbindung stehenden Dreiecksstücke beigetragen.

52.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Zu den Zahlenangaben der Artt. 32 und 39 kommt hinzu

$$(VI.M) = 0$$

und hiemit werden

$$(IV.M,3) = +2.1592\,;\ (V.M,4) = -0.1742\,,\ (VI.M,5) = +0.2257$$
$$S = 0.7313$$
$$P = 3.726$$

und das Verhältniss der Vergrösserung von P gegen die Bestimmung des Art. 39 wie 1 : 1.022.

53.

Gewicht des Winkels $(3)_5$. Zu den Zahlenwerthen des Art. 40 kommt hinzu

$$(VI,M) = 0$$

und hiemit

$$(V,M.4) = -1\,,\ (VI,M,5) = -0.5154$$
$$S = 0.7585$$
$$P = 4.141$$

mit dem Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.125 gegen die Bestimmung des Art. 40.

54.

Gewicht des Winkels $(2)_2$. Zu den Artt. 34 und 41 kommt hinzu

$$(VI,M) = -0.0658$$

also

$$(II,M,1) = 1\,,\ (IV.\,M,3) = -0.6572\,,\ (V,M,4) = +0.0240$$
$$(VI,M,5) = -0.5871\,,\ S = 0.4381$$
$$P = 1.780$$

mit dem Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.070 gegen die Bestimmung des Art. 41.

55.

Gewicht des Winkels $(1)_4$. Zu den Angaben der Artt. 35 und 42 kommt hinzu

$$(VI,M) = + 0.0658$$

also

$$(II,M,1) = 1 \ , \ (IV,M,3) = + 0.7308 \ , \ (V,M,4) = + 0.2702$$
$$(VI,M,5) = - 0.1260 \ , \ S = 0.4689$$
$$P = 1.883$$

mit dem Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.003 gegen die Bestimmung des Art. 42.

56.

Gewicht des log. der Seite (2)(5). Zu den Artt. 36 und 43 kommt hinzu

$$(VI,M) = - 60.68$$

also

$$(I,M) = - 8.293, \ (II,M,1) = - 34.126, \ (III,M,2) = - 72.660$$
$$(IV,M,3) = - 12.04, \ (V,M,4) = - 8.11 \ , \ (VI,M,5) = - 14.97$$
$$S = 2266.4$$
$$P = 0.001872$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1,048, gegen die Bestimmung des Art. 43.

57.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Zu den Artt. 37 und 44 kommt hinzu

$$(VI,M) = - 7.91$$

hiemit

$$(I,M) = - 8.29, \ (II,M,1) = 0 \ , \ (III,M,2) = - 1.10$$
$$(IV,M,3) = - 28.73, \ (V,M,4) = - 12.10, \ (VI,M,5) = - 14.21$$
$$S = 277.5$$
$$P = 0.001106$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.026 gegen Art. 44.

58.

Schliesslich soll angenommen werden, dass auch der Winkel $(2)_5$ beobachtet worden ist, wodurch den bisherigen Bedingungsgleichungen die folgende hinzugefügt werden muss.

$$(2)_1 + (1)_3 + (2)_3 + (3)_3 + (2)_5 = 180^\circ$$

Die Tafel des Art. 45 bekommt in Folge dessen die folgende Zusatzcolumne.

r	s	$q(r, VII)$
1	1	—
2		1
1	2	—
2		—
3		—
1	3	1
2		1
3		1
1	4	—
2		—
1	5	—
2		1
3		—

Zu den Coefficienten der Endgleichungen kommen hinzu

$$(I, VII) = 1\ ,\ (II, VII) = 1\ ,\ (III, VII) = 1\ ,\ (IV, VII) = -0.0983$$
$$(V, VII) = 0\ ,\ (VI, VII) = +6.3617\ ,\ (VII, VII) = 5$$

und zu den Hülfsgrössen die folgenden

$$(7)_1 = -(9.52288)\ ,\ (7)_2 = -(9.52288)\ ,\ (7)_3 = -(9.52288)$$
$$(7)_4 = +(9.07519)\ ,\ (7)_5 = +(9.61924)\ ,\ (7)_6 = -(9.72084)$$
$$(VII, VII, 6)\ 1.2366$$

Es sollen nun wieder die Gewichte derselben Dreiecksstücke berechnet werden wie vorher.

59.

Gewicht des Winkels $(1)_1$. Zu den Zahlenangaben des Art. 46 kommen hinzu

$$(VII, M) = 0\ ,\ (VII, M, 6) = -0.0778$$
$$S = 0.3650$$
$$P = 1.575$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.009, gegen die Bestimmung des Art. 46.

60.

Gewicht des Winkels $(1)_2$. Zum Art. 47 kommen hinzu

$$(VII, M) = 0\ ,\ (VII, M, 6) = -0.1295$$
$$S = 0.3640$$
$$P = 1.572$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.021, gegen Art. 47.

61.

Gewicht des Winkels $(3)_3$. Zum Art. 48 kommen hinzu

$$(VII,M) = 1\ ,\ (VII,M,6) = +\ 0.2073$$
$$S = 0.4549$$
$$P = 1.834$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.064 gegen Art. 48.

62.

Gewicht des Winkels $(2)_1$. Zum Art. 49 kommen hinzu

$$(VII,M) = 1\ ,\ (VII,M,6) = -\ 0.2742$$
$$S = 0.7284$$
$$P = 3.682$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.223 gegen Art. 49.

63.

Gewicht des hinzugekommenen, beobachteten Winkels $(2)_5$. Zum Art. 50 kommen hinzu

$$(VII,M) = (VII,M,6) = 1$$
$$S = 0.8088$$
$$P = 5.230$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.266, gegen Art. 50.

64.

Berechnung des Gewichts des log. der Seite (1)(5). Zum Art. 51 kommen hinzu

$$(VII,M) = -\ 14.925\ ,\ (VII,M,6) = -\ 3.859$$
$$S = 110.7$$
$$P = 0.002458$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.030 gegen Art. 51.

65.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Zum Art. 52 kommen hinzu

$$(VII,M) = 0\ ,\ (VII,M,6) = +\ 0.0656$$
$$S = 0.7347$$
$$P = 3.770$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.012 gegen Art. 52.

66.

Gewicht des Winkels $(3)_5$. Zum Art. 53 kommen hinzu

$$(VII,M) = 0\ ,\ (VII,M,6) = -\ 0.1452$$
$$S = 0.7756$$
$$P = 1.457$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.076 gegen Art. 53.

67.

Gewicht des Winkels $(2)_2$. Zum Art. 54 kommen hinzu

$$(VII,M) = 0\ ,\ (VII,M,6) = +\ 0.2405$$
$$S = 0.4849$$
$$P = 1.941$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.091 gegen Art. 54.

68.

Gewicht des Winkels $(1)_4$. Zum Art. 55 kommen hinzu

$$(VII,M) = 0\ ,\ (VII,M,6) = +\ 0.2654$$
$$S = 0.5259$$
$$P = 2.109$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.120 gegen Art. 55.

69.

Gewicht des log. der Seite (2)(5). Zum Art. 56 kommen hinzu

$$(VII,M) = -\ 43.82\ ,\ (V,M,6)' = -\ 2.39$$
$$S = 2271.0$$
$$P = 0.001888$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.009 gegen Art. 56. Ich habe die Berechnung dieses Gewichts eben so behandelt, wie die der übrigen Gewichte. Es liegt hier die Differentialgleichung des Art. 27 zu Grunde, in welcher die Variationen derjenigen Winkel eliminirt worden sind, die dort zu den nicht beobachteten zählten. Allein hier hätte auch die Gleichung

$$\Omega = +\ 9.374\,\delta(1)_1 - 12.156\,\{\delta(1)_3 + \delta(2)_3\}$$
$$-\ 17.667\,\delta(3)_3 - 40.396\,\delta(3)_5$$

desselben Artikels angewandt werden können, da jetzt alle in derselben vorkommenden Winkel zu den beobachteten zählen. Um die Uebereinstimmung der auf beide Arten berechneten Resultate zu zeigen, soll hier noch dasselbe Gewicht mit Zugrundelegung der vorstehenden Gleichung berechnet werden. Man bekommt jetzt

$(M,1)_1 = +\ \ 9.374\ ,\ (M,3)_3 = -17.667$
$(M,1)_3 = -12.156\ ,\ (M,3)_5 = -40.396$
$(M,2)_3 = -12.156\ ,$

und hieraus zuerst

$$R = 2327.3$$

ferner

$(I,M) \ \ = -\ \ 8.293\ ,\ (V,M) \ \ = +40.396$
$(II,M) \ = -12.156\ ,\ (VI,M) \ = -55.56$
$(III,M) = -12.156\ ,\ (VII,M) = -41.979$
$(IV,M) = +\ \ 1.195$

und hieraus

$(II,M,1) \ = -12.156\ ,\ (V,M,4) \ \ = +47.341$
$(III,M,2) = -12.156\ ,\ (VI,M,5) \ = -15.327$
$(IV,M,3) = +\ \ 9.580\ ,\ (VII,M,6) = -\ \ 2.212$

$$S = 1797.8$$
$$P = 0.001888$$

wie oben.

70.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Zum Art. 57 kommen hinzu

$(VII,M) = -3.47\ ,\ (VII,M,6) = -1.33$

$$S = 278.9$$
$$P = 0.001107$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.001 gegen Art. 57.

71.

Ich werde nun noch die Gewichte der Seiten (2)(3) und (3)(4) mit Zuziehung aller Bedingungsgleichungen berechnen, die ursprünglich zwar aufgenommen, aber weiterhin übergangen worden sind.

Gewicht des log. der Seite (2)(3). Die Grundgleichung und der Werth $R = 400.1$ bleiben wie im Art. 20, und ausserdem ergeben sich

$(I,M) = -8.29\ ,\ (VI,M) = -23.64\ ,\ (VII,M) = -17.67$

woraus

$(VI,M,5) = -20.00\ ,\ (VII,M,6) = -4.40$

$$S = 84.1$$
$$P = 0.003164$$

hervorgehen. Das Vergrösserungsverhältniss wird 1 : 1.193 gegen Art. 20.

72.

Gewicht des log. der Seite (3)(4). Die Grundgleichung und der Werth $R = 746.5$ bleiben wieder wie im Art. 21, und ausserdem ergeben sich

$$(I,M) = -8.29\ ,\ (IV,M) = -18.24\ ,\ (V,M) = -13.16$$
$$(VI,M) = -25.38\ ,\ (VII,M) = -17.67$$

woraus die Werthe

$$(IV.M.3) = -18.24\ ,\ (V,M,4) = -3.24$$
$$(VI,M.5) = -26.08\ ,\ (VII,M,6) = -4.72$$
$$S = 176.3$$
$$P = 0.001754$$

hervorgehen. Das Vergrösserungsverhältniss wird 1 : 1.269 gegen Art. 21.

73.

Im Vorhergehenden sind mit Ausnahme der beiden oben berechneten Gewichte die Vergrösserungsverhältnisse von Stufe zu Stufe angesetzt worden, hier sollen dagegen dieselben aus den ursprünglichen und den schliesslichen Werthen berechnet angesetzt werden, um die volle Wirkung der angeführten zwei Diagonalen in das ursprünglich betrachtete Dreiecksnetz erkennen zu können.

Winkel	Ursprüngliches Gewicht		Schliessliches Gewicht		Vergrösserungsverhältniss
$(1)_1$	Art. 18	1.5,	Art. 59	1.575	1 : 1.050
$(1)_2$	– 18	1.5,	– 60	1.572	1 : 1.048
$(3)_3$	– 18	1.5,	– 61	1.834	1 : 1.222
$(2)_1$	– 29	1.712,	– 62	3.682	1 : 2.150
$(2)_5$	– 28	2.331,	– 63	5.230	1 : 2.244
$(3)_2$	– 25	2.372,	– 65	3.770	1 : 1.589
$(3)_5$	– 26	2.356,	– 66	4.457	1 : 1.891
$(2)_2$	– 18	1.5,	– 67	1.941	1 : 1.294
$(1)_4$	– 18	1.5,	– 68	2.109	1 : 1.406
Seiten					
log. (1)(5)	– 30	0.002010,	– 64	0.002458	1 : 1.223
– (2)(5)	– 27	0.001588,	– 69	0.001888	1 : 1.189
– (4)(5)	– 22	0.000863,	– 70	0.001107	1 : 1.283
– (3)(4)	– 21	0.001382,	– 72	0.001754	1 : 1.269
– (2)(3)	– 20	0.002652,	– 71	0.003164	1 : 1.493

Man erkennt hieraus ohne Weiteres, auf welche Dreiecksstücke die Beobachtung der zwei Diagonalen eine grössere oder kleinere Wirkung ausgeübt hat. Es liesse sich in der Figur noch eine Diagonale einführen, aber da ich meine, dass die bisher betrachteten dem Zwecke gnügen, so unterlasse ich dieses.

74.

Wir können aus dem Vorhergehenden schon einige Schlüsse ziehen, die allgemein statt finden.

1) Jede neu hinzukommende Bedingungsgleichung vergrössert die Gewichte, sei sie eine Winkel- oder sei sie eine Seitengleichung, und seien die Coefficienten derselben wie sie wollen.

2) In Folge dessen ist nicht unbedingt nothwendig in jedem Dreiecke alle drei Winkel zu messen, wenn nur statt der fehlenden Winkelgleichungen eine entsprechende Anzahl von Seitengleichungen vorhanden sind.

3) Wo keine Diagonalen eingeschnitten werden können, ist die Messung aller drei Winkel jedes Dreiecks unerlässlich.

4) In den Bedingungsgleichungen sind die kleinsten Winkel zulässig.

5) Seitengleichungen mit sehr kleinen Winkeln üben auf die Vergrösserung einiger Gewichte grossen Einfluss aus, der Einfluss überhaupt erstreckt sich aber nicht weit über den Bereich der Bedingungsgleichung hinaus.

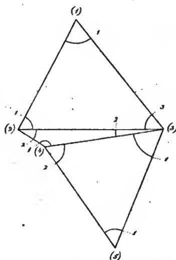
6) Seitengleichungen ohne sehr kleine Winkel vergrössern im Allgemeinen die Gewichte der Winkel, von welchen sie abhängen, weniger, ihre Wirkung erstreckt sich aber auf einen grössereu Theil des Dreiecksnetzes.

7) Zwei einseitig beobachtete Diagonalen wirken in der Regel vortheilhafter ein, wie eine zweiseitig beobachtete.

8) Da die Gewichte der Dreiecksseiten abnehmen, je weiter sie von der Grundlinie entfernt liegen, oder je mehr Dreiecke bei ihrer Berechnung zu durchlaufen sind, so ist es von bedeutendem Vortheil, in angemessenen Entfernungen von einander, so viele Grundlinien zu messen, wie die Umstände zulassen.

75.

Wir wollen jetzt die drei an einander gereihten Dreiecke der folgenden Figur betrachten.



Die Winkel, die eben so bezeichnet sind, wie in der vorhergehenden Figur, sollen hier die folgenden Werthe haben.

$$(1)_1 = 66^0,\quad (2)_2 = 33^0,\quad (1)_3 = 60^0$$
$$(1)_2 = 64,\quad (2)_3 = 10,\quad (2)_4 = 50$$
$$(3)_3 = 50,\quad (1)_4 = 137,\quad (1)_5 = 70$$

76.

Die Bedingungsgleichungen und deren Differentialquotienten werden nun wieder dieselben wie im Art. 16, nemlich die letzteren:

r	s	$q(r,I)_s$	$q(r,II)_s$	$q(r,III)_s$
1	1	1	—	—
1	2	1	—	—
2		—	1	—
1	3	—	—	1
2		—	1	—
3		1	—	—
1	4	—	1	—
2		—	—	1
1	5	—	—	1

Die Divisoren werden auch dieselben, nemlich:

$$(I,I) = 3\,,\ (II,II) = 3\,,\ (III,III) = 3$$

und die Gewichte aller Winkel erhalten wieder den gemeinschaftlichen Werth 1,5. Da das erste Dreieck der vorstehenden Figur dieselben Winkel hat, wie das erste Dreieck der Figur des Art. 15, so wird wieder das Gewicht des log. der Seite (2)(3) eben so wie im Art. 20, nemlich

$$= 0.002652$$

aber die Gewichte der Seiten der anderen Dreiecke werden anders.

77.

Gewicht des log. der Seite (3)(4). Die Grundgleichung ist dieselbe wie im Art. 21, aber die numerischen Werthe der Differentialquotienten werden zum Theil anders, und zwar

$$\Omega = + 9.38\delta(1)_1 + 32.43\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3 + 22.58\delta(1)_4$$

Hier bekommt man also

$$(M,1)_1 = + \ 9.38\ , \ (M,3)_3 = - 17.67$$
$$(M,2)_2 = + 32.43\ , \ (M,1)_4 = + 22.58$$
$$R = 1964.4$$

ferner

$$(I,M) = - 8.29\ , \quad (II,M) = + 55.01\ , \quad (III,M) = 0$$
$$S = 1031.9$$
$$P = 0.001076$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 0,779 gegen Art. 21. Das Gewicht der oben genannten Seite (3)(4) der Figur des Art. 75 ist also wesentlich kleiner, als das Gewicht der gleichbenannten Seite der Figur des Art. 15.

78.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Die Grundformel ist hier die des Art. 22. und die Differentialgleichung derselben wird jetzt

$$\Omega = + 9.38\delta(1)_1 + 32.43\delta(2)_2 + 12.16\delta(1)_3$$
$$-17.67\delta(3)_3 + 22.58\delta(1)_4 + 7.67\delta(1)_5$$

also

$$(M,1)_1 = + \ 9.38\ , \ (M,3)_3 = - 17.67$$
$$(M,2)_2 = + 32.43\ , \ (M,1)_4 = + 22.58$$
$$(M,1)_3 = + 12.16\ , \ (M,1)_5 = - \ 7.67$$
$$R = 2168.0$$
$$(I,M) = - 8,29\ , \quad (II,M) = + 55.01\ , \quad (III,M) = + 4.49$$
$$S = 1038.6$$
$$P = 0.000813$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 0.942 gegen Art. 22. Das Gewicht wird also hier wieder kleiner als das der gleichbenannten Seite der Figur des Art. 15, das Verhältniss der Verkleinerung ist jedoch nicht so gross, wie im vor. Art.

79.

Wir wollen jetzt die Verhältnisse des zweiten Dreiecks der Figur des Art. 75 so ändern, dass der Winkel $(2)_2$ grösser wird. Es seien nun die zwei Winkel dieses Dreiecks

$$(2)_2 = 75^\circ\,,\quad (1)_4 = 95^\circ$$

während alle übrigen Winkel unverändert bleiben. Untersuchen wir jetzt die Gewichte der beiden vorher betrachteten Seiten.

80.

Gewicht des log. der Seite (3)(4). Die Differentialgleichung wird jetzt

$$\Omega = +\,9.38\delta(1)_1 + 5.64\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3 + 1.84\delta(1)_4$$

also

$$(M,1)_1 = +\,9.38\,,\quad (M,3)_3 = -17.67$$
$$(M,2)_2 = +\,5.64\,,\quad (M,1)_4 = +\;\;1.84$$
$$R = 435.3$$
$$(I,M) = -\,8.29\,,\quad (II,M) = +\,7.48\,,\quad (III,M) = 0$$
$$S = 41.6$$
$$P = 0.002540$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.838 gegen Art. 21. Das Vergrösserungsverhältniss ist also hier bedeutend im Vergleich mit der Figur des Art. 15.

81.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Die Differentialgleichung wird jetzt

$$\Omega = +\;\;9.38\delta(1)_1 + 5.64\delta(2)_2 + 12.16\delta(1)_3$$
$$-\,17.67\delta(3)_3 + 1.84\delta(1)_4 -\;\;7.67\delta(1)_5$$

also

$$(M,1)_1 = +\;\;9.38\,,\quad (M,3)_3 = -\;17.67$$
$$(M,2)_2 = +\;\;5.64\,,\quad (M,1)_4 = +\;\;1.84$$
$$(M,1)_3 = +\,12.16\,,\quad (M,1)_5 = -\;\;7.67$$
$$R = 641.9$$
$$(I,M) = -\,8.29\,,\quad (II,M) = +\,7.48\,,\quad (III,M) = +\,4.49$$

$S = 48.3$

$P = 0.001685$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1,952 gegen Art. 22. Also auch das Gewicht dieser Seite hat im Vergleich mit dem der gleichbenannten Seite der Figur des Art. 15 eine bedeutende Vergrösserung erhalten.

82.

Wir können aus den vorstehenden Untersuchungen einen wichtigen Schluss ziehen.

«Die alte Vorschrift, dass in den an einander gereihten Dreiecken «eines Dreiecksnetzes kein Winkel vorkommen dürfe, welcher kleiner als «24° oder bez. 30° ist, ist einer bedeutenden Erweiterung fähig.»

Und zwar:

«In an einander gereihten Dreiecken ist auch der kleinste Winkel «statthaft, vorausgesetzt dass in demselben Dreieck kein zweiter einiger «Maassen kleiner Winkel vorkommt, und sich die Fortsetzung des Dreiecksnetzes an die längere Seite knüpft.»

Dieser Satz gilt auch dann wenn mehrere Dreiecke, die Einen kleinen Winkel enthalten, an einander gereiht sind.

83.

Um den Nachtheil mehr hervor zu heben, welcher entsteht, wenn ein angereihtes Dreieck zwei kleine Winkel hat, und man zugleich die Fortsetzung des Netzes an die kleinste Seite knüpft, soll das folgende Beispiel dienen.

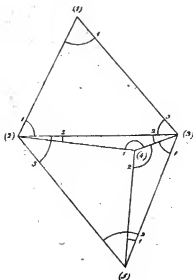
Denkt man sich in der nachfolgenden Figur vorläufig die Seite (2)(5) weg, so besteht sie wieder aus drei an einander gereihten Dreiecken, in welchen die Winkel die folgenden Werthe haben.

$(1)_1 = 66°,\quad (2)_2 = 5°,\quad (1)_3 = 55°$

$(1)_2 = 64,\quad (2)_3 = 15,\quad (2)_4 = 107$

$(3)_3 = 50,\quad (1)_4 = 160,\quad (1)_5 = 18$

Es wird nun wieder das Gewicht jedes Winkels = 1,5, und da das erste Dreieck dieselben Winkel hat, wie in den vorhergehenden Figuren, so wird auch wieder das Gewicht des log. der Seite (2)(3) = 0,002652. Aber die Gewichte der übrigen Seiten werden nun sehr klein.



84.

Gewicht des log. der Seite (3)(4). Die Differentialgleichung wird jetzt

$$\Omega = +\ 9{,}38\delta(1)_1 + 240.66\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3 + 57.85\delta(1)_4$$

also

$$(M,1)_1 = +\ \ 9.38\ ,\quad (M,3)_3 = -\ 17.67$$
$$(M,2)_2 = +240.66\ ,\quad (M,1)_4 = +\ 57.85$$
$$R = 61663$$
$$(I,M) = -\ 8.29\ ,\quad (II,M) = +\ 298.51\ ,\quad (III,M) = 0$$
$$S = 29726$$
$$P = 0{,}0000313$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 0.023 gegen Art. 21, und dasselbe 1 : 0.012 gegen Art. 80.

85.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Die Differentialgleichung wird jetzt

$$\Omega = +\ \ 9.38\delta(1)_1 + 240.66\delta(2)_2 + 14.74\delta(1)_3$$
$$-\ 17.67\delta(3)_3 +\ \ 57.85\delta(1)_4 - 64.80\delta(1)_5$$

also

$$(M,1)_1 = + \ \ 9.38\,,\quad (M,3)_3 = - 17.67$$
$$(M,2)_2 = +240.66\,,\quad (M,1)_4 = + 57.85$$
$$(M,1)_3 = + \ 14.74\,,\quad (M,1)_5 = - 64.80$$
$$R = 66080$$
$$(I,M) = - 8.29\,,\quad (II,M) = + 298.51\,,\quad (III,M) = - 50.06$$
$$S = 30561$$
$$P = 0.0000282$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 0.033 gegen Art. 22. und dasselbe 1 : 0.017 gegen Art. 81.

86.

Es soll noch das Gewicht der Seite (3)(5) berechnet werden. Die Grundgleichung ist hier

$$\log (3)(5) = \log (1)(2) + \log. \sin (1)_1 \sin (2)_2 \sin (2)_4$$
$$- \log. \sin (3)_3 \sin (1)_4 \sin (1)_5$$

und die Differentialgleichung

$$\Omega = + \ \ 9.38\delta(1)_1 + 240.66\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3$$
$$+ 57.85\delta(1)_4 - \ \ 6.44\delta(2)_4 - 64.80\delta(1)_5$$

also

$$(M,1)_1 = + \ \ 9.38\,,\quad (M,1)_4 = + 57.85$$
$$(M,2)_2 = +240.66\,,\quad (M,2)_4 = - \ \ 6.44$$
$$(M,3)_3 = - \ 17.67\,,\quad (M,1)_5 = - 64.80$$
$$R = 65904$$
$$(I,M) = - 8.29\,,\quad (II,M) = + 298.51\,,\quad (III,M) = - 71.24$$
$$S = 31418$$
$$P = 0.0000290$$

Diese drei Seiten bekommen also im gegenwärtigen Falle sehr kleine Gewichte, wie sich voraussehen liess.

87.

Es kann von Interesse sein in Erfahrung zu bringen, wie die Gewichte der Seite (2)(5) und der anliegenden Winkel $(3)_2$ und $(2)_5$ im gegenwärtigen Falle beschaffen sind, wenn man die Voraussetzung immer noch festhält, dass diese beiden Winkel nicht beobachtet worden sind. Als Vorbereitung zu dieser Rechnung sind, wie weiter oben, zuerst die beiden Bedingungsgleichungen aufzustellen, die statt finden würden, wenn

die genannten Winkel beobachtet wären. Diese findet man leicht aus der Figur des Art. 83 wie folgt:

$$\frac{\sin[(3)_2 - (2)_5]\sin[(1)_3 + (2)_3]\sin(2)_4}{\sin(3)_2\sin(1)_3\sin[(1)_4 + (2)_4]} = -1$$

$$(3)_2 + (1)_3 + (2)_3 + (2)_5 = 180^\circ$$

und die Auflösung der ersten in Bezug auf $(3)_2$ giebt

$$\mathrm{tg}\,(3)_2 = \frac{\sin[(1)_3 + (2)_3]\sin(2)_4\sin(2)_5}{\sin(1)_3\sin[(1)_4 + (2)_4] + \sin[(1)_3 + (2)_3]\sin(2)_4\cos(2)_5}$$

Hieraus erhält man

$$(3)_2 = 45^\circ\,24',70\,,\quad (2)_5 = 64^\circ\,35',30$$

Die Differentialgleichung der ersten Bedingungsgleichung wird nachdem sie mit der Zahl 10 dividirt worden ist,

$$0 = -2.4729\delta(2)_2 + 0.3975\delta(3)_2 - 0.7080\delta(1)_3$$
$$+ 0.7663\delta(2)_3 - 0.1103\delta(1)_4 - 0.74540\delta(2)_4$$

und die der zweiten

$$0 = \delta(3)_2 + \delta(1)_3 + \delta(2)_3 + \delta(2)_5$$

Löst man die erste in Bezug auf $\delta(3)_2$ auf, so ergiebt sich für die Berechnung des Gewichts dieses Winkels

$$\Omega = \delta(3)_2 = +6.2211\delta(2)_2 + 1.7811\delta(1)_3 - 1.9279\delta(2)_3$$
$$+ 0.2776\delta(1)_4 + 1.8968\delta(2)_4$$

und eliminirt man hiemit $\delta(3)_2$ aus der zweiten, so erhält man für $(2)_5$

$$\Omega = \delta(2)_5 = -6.2211\delta(2)_2 - 2.7811\delta(1)_3 + 0.9279\delta(2)_3$$
$$- 0.2776\delta(1)_4 - 1.8968\delta(2)_4$$

Die Figur giebt ferner

$$\log(2)(5) = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_1\sin[(1)_3 + (2)_3]$$
$$- \log.\sin(3)_3\sin(2)_5$$

womit

$$\Omega = \delta\log(2)(5) = +9.374\delta(1)_1 + 7.663[\delta(1)_3 + \delta(2)_3]$$
$$- 17.667\delta(3)_3 - 10.003\delta(2)_5$$

oder nachdem $\delta(2)_5$ durch die vorstehende Gleichung eliminirt worden ist,

$$\Omega = \delta\log(2)(5) = +9.374\delta(1)_1 + 6.223\delta(2)_2 + 35.482\delta(1)_3$$
$$- 1.619\delta(2)_3 - 17.667\delta(3)_3 + 2.777\delta(1)_4 + 18.974\delta(2)_4$$

sich ergiebt.

88.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Der vor. Art. giebt

$$(M,2)_2 = +6.2211\,,\quad (M,1)_4 = +0.2776$$
$$(M,1)_3 = +1.7811\,,\quad (M,2)_4 = +1.8968$$
$$(M,2)_3 = -1.9279$$

und hiemit

$$R = 49.28$$
$$(I,M) = 0\ ,\quad (II,M) = +\ 4.5708\ ,\quad (III,M) = +\ 3.6779$$
$$S = 11.48$$
$$P = 0.0265$$

89.

Gewicht des Winkels $(2)_5$. Der vorvor. Art. giebt

$$(M,2)_2 = -\ 6.2211\ ,\quad (M,1)_4 = -\ 0.2776$$
$$(M,1)_3 = -\ 2.781\ ,\quad (M,2)_4 = -\ 1.8968$$
$$(M,2)_3 = +\ 0.9279$$

und hiemit

$$R = 50.98$$
$$(I,M) = 0\ ,\quad (II,M) = -\ 5.5708\ ,\quad (III,M) = -\ 4.6779$$
$$S = 17.64$$
$$P = 0.0300$$

Die Gewichte dieser beiden Winkel werden also sehr klein.

90.

Gewicht des log. der Seite (2)(5). Der Art. 87 giebt

$$(M,1)_1 = +\ 9.374\ ,\quad (M,3)_3 = -\ 17.667$$
$$(M,2)_2 = +\ 6.223\ ,\quad (M,1)_4 = +\ 2.777$$
$$(M,1)_3 = +\ 35.482\ ,\quad (M,2)_4 = +\ 18.974$$
$$(M,2)_3 = -\ 1.619$$

woraus

$$R = 2069$$
$$(I,M) = -\ 8.293\ ,\quad (II,M) = +\ 7.379\ ,\quad (III,M) = +\ 54.456$$
$$S = 1030$$
$$P = 0.000963$$

hervorgehen. Auch ein kleines Gewicht, es kann jedoch dazu bemerkt werden, dass es ein wenig grösser ist, wie das, welches im Art. 22 für die Seite (4)(5) der dort geltenden Figur erhalten wurde.

91.

Es soll jetzt angenommen werden, dass die beiden Winkel $(3)_2$ und $(2)_5$ beobachtet worden sind, und es sollen die Gewichte der obigen Dreiecksstücke unter dieser Voraussetzung berechnet werden. Die Diffe-

rentialgleichungen der nun hinzukommenden zwei neuen Bedingungsgleichungen sind schon im Art. 87 gegeben, stellen wir sie nebst den überdies statt findenden zusammen, so erhalten wir das folgende Täfelchen.

r	s	$q(r.I)$	$q(r.II)$	$q(r.III)$	$\log q(r.IV)$	$q(r.IV)$	$q(r.V)$
1	1	1	—	—	—	—	—
1	2	1	—	—	—	—	—
2		—	1	—	0.39321n	−2.4729	—
3		—	—	—	9.59934	+0.3975	1
1	3	—	—	1	9.85003n	−0.7080	1
2		—	1	—	9.88442	+0.7663	1
3		1	—	—	—	—	—
1	4	—	1	—	9.04275n	−0.1103	—
2		—	—	1	9.87737n	−0.7540	—
1	5	—	—	1	—	—	—
2		—	—	—	—	—	1

Die Werthe der Coefficienten der Endgleichungen ergeben sich hieraus wie folgt.

	I	II	III	IV	V
I	3.0	0	0	0	0
II		3.0	0	− 1.8469	+ 1.0
III			3.0	− 1.4620	+ 1.0
IV				7.9426	+ 0.4558
V					4.0

und hieraus ergeben sich die folgenden Werthe der Hülfsgrössen

$$(2)_1 = 0\,, \quad (3)_1 = 0\,, \quad (4)_1 = 0\,, \quad (5)_1 = 0$$
$$(3)_2 = 0\,, \quad (4)_2 = (9.78221)\,, \quad (5)_2 = -(9.52288)$$
$$(4)_3 = (9.68783)\,, \quad (5)_3 = -(9.52288)$$
$$(5)_4 = -(9.40253)$$
$$(I,I) = 3.0\,, \quad (II,II,1) = 3.0\,, \quad (III,III,2) = 3.0$$
$$(IV,IV,3) = 6.1297\,, \quad (V,V,4) = 2.9420$$

92.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Wenn wir direct verfahren, so bekommen wir hier

$$(M,3)_2 = 1\,, \quad R = 1$$
$$(IV,M) = (IV,M,3) = +\,0.3975\,,\ (V,M) = 1\,,\ (V,M,4) = +\,0.8996$$
$$S = 0.3009$$
$$P = 1.430$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 54.0 gegen Art. 88.

93.

Gewicht des Winkels $(2)_5$. Eben so wie vorher wird hier

$$(M,2)_5 = 1\ ,\quad R = 1$$
$$(V,M) = (V,M,4) = 1$$
$$S = 0.3399$$
$$P = 1.515$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 50,5 gegen Art. 89.

94.

Gewicht der Seite (2)(5). Da hier der erste Ausdruck von $\Omega = \delta.\log(2)(5) =$ etc. des Art. 87 Geltung hat, so bekommen wir zuerst

$$(M,1)_1 = +\ 9.374\ ,\quad (M,3)_3 = -\ 17.667$$
$$(M,1)_3 = +\ 7.663\ ,\quad (M,2)_5 = -\ 10.003$$
$$(M,2)_3 = +\ 7.663$$

und hiemit

$$R = 117.51$$
$$(I,M) = -\ 8.293\ ,\ (II,M) = +\ 7.663\ ,\ (III,M) = +\ 7.663$$
$$(IV,M) = -\ 0.4471\ ,\ (V,M) = +\ 5.323$$
$$(II,M,1) = (III,M,2) = (II,M)$$
$$(IV,M,3) = +\ 7.928\ ,\quad (V,M,4) = -\ 1.790$$
$$S = 73.43$$
$$P = 0.002906$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 3.018 gegen Art. 90.

95.

Gewicht des log. der Seite (3)(5). Die Grundgleichung kann jetzt wie folgt gestellt werden,

$$\log(3)(5) = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_1\sin(3)_2 - \log.\sin(3)_3\sin(2)_5$$

und diese giebt

$$\Omega = +\ 9.374\delta(1)_1 + 20.754\delta(3)_2 - 17.667\delta(3)_3 - 10.003\delta(2)_5$$

mithin

$$(M,1)_1 = +\ 9.374\ ,\qquad (M,3)_3 = -\ 17.667$$
$$(M,3)_2 = +\ 20.754\ ,\qquad (M,2)_5 = -\ 10.003$$
$$R = 930.80$$
$$(I,M) = -\ 8.293\ ,\quad (II,M) = 0\ ,\quad (III,M) = 0$$
$$(IV,M) = +\ 8.250\ ,\quad (V,M) = +\ 10.751$$
$$(II,M,1) = (III,M,2) = 0\ ,\ (IV,M,3) = +\ 8.250\ ,\ (V,M,4) = +\ 8.666$$

$S = 59.57$

$P = 0.001148$

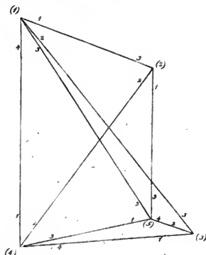
Vergrösserungsverhältniss 1 : 39.58 gegen Art. 86.

96.

In Bezug auf die in den Artt. 92 und 93 erhaltenen Gewichte der Winkel $(3)_2$ und $(2)_5$, von welchen das eine kleiner, und das andere nur wenig grösser ist wie 1.5, ist zu bemerken, dass die Gewichte der Winkel dieses Dreiecks, wenn man den Punkt (4) weglässt, nur 1,333 werden. Die Ursache davon ist die Annahme, dass der Winkel (2)(3)(5) aus den zwei für sich gemessenen Winkeln $(1)_3$ und $(2)_3$ zusammen gesetzt worden ist.

97.

Ein merkwürdiges Beispiel, wie durch Einschaltung eines Dreieckspunkts das Gewicht einer Seite unter Umständen vergrössert werden kann, giebt Gauss in seinem «Supplementum theoriae combinationis etc.» Dieses soll schliesslich hier noch, aber mit einer Aenderung der Winkelgleichungen, die für unsern Zweck dienlich ist, angeführt werden. Die dazu gehörige Figur ist die folgende.



in welcher

(1) die Station Wilsede
(2) - - Wulfsode
(3) - - Breithorn
(4) - - Falkenberg
(5) - - Hauselberg

sind. Zur leichteren Vergleichung führe ich noch die Bezeichnung der Richtungen sowohl nach Gauss wie nach mir an. Diese sind

$$(0) = (1)_4 ,\quad (4) = (1)_3 ,\quad (7) = (1)_5$$
$$(1) = (2)_4 ,\quad (5) = (2)_3 ,\quad (8) = (2)_5$$
$$(2) = (3)_4 ,\quad (6) = (3)_3 ,\quad (9) = (3)_5$$
$$(3) = (4)_4 ,\quad (10) = (4)_5$$
$$(11) = (1)_2 ,\quad (14) = (4)_1$$
$$(12) = (2)_2 ;\quad (15) = (1)_1$$
$$(13) = (3)_2 ,\quad (16) = (2)_1$$
$$(17) = (3)_1$$

in welcher Zusammenstellung linker Hand des Gleichheitszeichens die Gaussische, und rechter Hand meine Bezeichnung enthalten ist.

98.

Die Bedingungsgleichungen, die ich anwenden werde, sind die folgenden,

$$(4)_1 - (1)_1 + (3)_2 - (2)_2 + (2)_4 - (1)_4 = 180^0 + \varepsilon$$
$$(4)_1 - (2)_1 + (3)_3 - (1)_3 + (4)_4 - (1)_4 = 180^0 + \varepsilon'$$
$$(4)_1 - (3)_1 + (3)_4 - (1)_4 + (2)_5 - (1)_5 = 180^0 + \varepsilon''$$
$$(3)_1 - (1)_1 + (3)_2 - (1)_2 + (3)_5 - (2)_5 = 180^0 + \varepsilon'''$$
$$(2)_3 - (1)_3 + (4)_4 - (3)_4 + (4)_5 - (1)_5 = 180^0 + \varepsilon^{IV}$$
$$\frac{\sin[(4)_1-(3)_1]\sin[(3)_3-(2)_3]\sin[(4)_4-(3)_4]}{\sin[(3)_1-(2)_1]\sin[(2)_3-(1)_3]\sin[(3)_4-(1)_4]} = 1$$
$$\frac{\sin[(4)_1-(3)_1]\sin[(3)_2-(1)_2]\sin[(3)_5-(2)_5]}{\sin[(3)_1-(1)_1]\sin[(2)_2-(1)_2]\sin[(3)_5-(1)_5]} = 1$$

Die Vergleichung zeigt, dass diese beiden Seitengleichungen mit denen von Gauss aufgestellten ohne Weiteres identisch sind, aber dass dieses bei den Winkelgleichungen nicht der Fall ist; im Grunde findet dieses dennoch statt, da jene sich aus diesen durch Eliminationen herstellen lassen *).

*) Es sind $(4)_4 - (3)_4 = 8^\circ\, 1'$ und $(3)_1 - (2)_1 = 4^\circ\, 22'$. Man sieht hieraus, dass Gauss sich nicht gescheut hat, Bedingungsgleichungen mit sehr kleinen Winkeln anzuwenden, wie von ihm auch zu erwarten war.

Die Tafel für die Coefficienten der Bedingungsgleichungen steht nun wie folgt,

r	s	$q(r.I)$	$q(r.II)$	$q(r.III)$	$q(r.IV)$	$q(r.V)$	$\log q(r.VI)$	$\log q(r.VII)$
1	1	−1	—	—	−1	—	—	9.76433
2		—	−1	—	—	—	0.13893	—
3		—	—	−1	+1	—	0.18653n	0.08607n
4		+1	+1	+1	—	—	9.20276	9.80482
1	2	—	—	—	−1	—	—	9.85866
2		−1	—	—	—	—	—	9.75724n
3		+1	—	—	+1	—	—	9.17725n
1	3	—	−1	—	—	−1	9.29137	—
2		—	—	—	—	+1	9.60010n	—
3		—	+1	—	—	—	9.30685	—
1	4	−1	−1	−1	—	—	8.33445	8.93551
2		+1	—	—	—	—	—	9.68413n
3		—	—	+1	—	−1	9.88615n	9.59879
4		—	+1	—	—	+1	9.87384	—
1	5	—	—	−1	—	+1	—	—
2		—	—	+1	−1	—	—	—
3		—	—	—	+1	—	—	—
4		—	—	—	—	−1	—	—

welche voraussetzt, dass die erste Seitengleichung mit 200, und ie zweite mit 50 dividirt worden ist.

Die Coefficienten der Endgleichungen giebt hierauf das folgende Täfelchen.

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*
I	6	+2	+2	+2	0	+0.1379	−0.0912
II		6	+2	0	+2	−0.4844	+0.5518
III			6	−2	−2	+0.9050	+2.1680
IV				6	0	−1.5365	−2.6730
V					6	+0.9235	−0.3970
VI						5.6722	+1.6716
VII							3.5004

*) Durch die Auflösung der Endgleichungen ergeben sich die folgenden Werthe der Hülfsgrössen die mit zur Berechnung der Gewichte dienen,

*) Man findet hieraus, wenn man mit $(200)^2$ multiplicirt,

$$(VI.VI) = 226888$$

während Gauss 224868 angiebt. Es scheint hier der Fehler bei Gauss zu liegen; er hat übrigens nur unbedeutende Wirkung.

$(2)_1 = -(9.52288)$,
$(3)_1 = -(9.52288)$, $(3)_2 = -(9.39794$
$(4)_1 = -(9.52288)$, $(4)_2 = -(9.09691)$, $(4)_3 = +(9.69897)$
$(5)_1 = 0$, $(5)_2 = -(9.57403)$, $(5)_3 = +(9.69897)$
$(6)_1 = -(8.36141)$, $(6)_2 = +(8.99736)$, $(6)_3 = -(9.29732)$
$(7)_1 = +(8.18185)$, $(7)_2 = -(9.03807)$, $(7)_3 = -(9,61338)$

$(5)_4 = +(9.39794)$
$(6)_4 = +(9.45981)$, $(6)_5 = -(9.54942)$
$(7)_4 = +(9.58643)$, $(7)_5 = -(7.82737)$, $(7)_6 = -(9.27562)$
$(I,I) = 6.0$, $(II,II,1) = 5.3333$, $(III,III,2) = 5,0$, $(IV,IV,3) = 4.0$
$(V,V,4) = 3.75$, $(VI,VI,5) = 4.6158$, $(VII,VII,6) = 1.9968$

99.

Ich werde jetzt nur das Gewicht der Seite (3)(4) in Beziehung auf (1)(2), das ist das der Seite Breithorn-Falkenberg in Beziehung auf Wilsede-Wulfsode, dasselbe welches Gauss hat, berechnen. Die Grundformel ist

$$\log(3)(4) = \log(1)(2) + \log.\sin[(4)_1-(2)_1]\sin[(3)_2-(2)_2] - \log.\sin[(3)_3-(1)_3]\sin[(2)_4-(1)_4]$$

zu welcher bemerkt werden kann, dass die Station (5) darin gar nicht vorkommt. Es wird nun

$$\Omega = -27.146\delta(2)_1 + 27.146\delta(4)_1 - 6.326\delta(2)_2 + 6.326\delta(3)_2 + 14.337\delta(1)_3 - 14.337\delta(3)_3 + 27.568\delta(1)_4 - 27.568\delta(2)_4$$

und folglich werden hier

$(M,2)_1 = -27.146$, $(M,3)_2 = +6.326$, $(M,1)_4 = +27.568$
$(M,4)_1 = +27.146$, $(M,1)_3 = +14.337$, $(M,2)_4 = -27.568$
$(M,2)_2 = -6.326$, $(M,3)_3 = -14.337$

und hieraus folgt vor Allem

$$R = 3485.0$$

Die weitere Rechnung giebt

$(I,M) = -15.338$, $(V,M) = -14.337$
$(II,M) = -1.950$, $(VI,M) = -32.555$
$(III,M) = -0.422$, $(VII,M) = +35.683$
$(IV,M) = +6.326$.

$(II,M,1) = + 3.163$, $(V,M,4) = - 10.127$
$(III,M,2) = + 3.900$, $(VI,M,5) = - 25.097$
$(IV,M,3) = + 13.784$, $(VII,M,6) = + 43.625$

und mit Angabe der einzelnen Glieder der Reihe nach

$$\begin{array}{r} 39.2 \\ 1.9 \\ 3.0 \\ 47.5 \\ 27.3 \\ 136.5 \\ 1038.8 \\ \hline S = 1294.2 \end{array}$$

und hieraus folgt

$$P = 0.0004564$$

Denkt man sich nun die Station (5) weg, so fallen die fünf letzten Bedingungsgleichungen weg, und nur die ersten beiden bleiben bestehen. In dem Ausdruck von S fallen zugleich die fünf letzten Glieder weg, und es wird daher jetzt

$$S = 41.1$$

während R unverändert bleibt. Das Gewicht welches nun sich herausstellt ist

$$P = 0.0002903$$

und die Zuziehung der Station (5) zu Bestimmung der Seite (3)(4) hat also das Gewicht derselben im Verhältniss von

$$1 : 1.572$$

vergrössert, welches mit dem Gaussischen Resultat, welches 1 : 1571 ist, befriedigend übereinstimmt. Um das Gewicht der Seite selbst zu erhalten führe ich nach Gauss an, dass die Länge derselben 26767 Meter beträgt, und hiemit geben die beiden obigen Angaben des Gewichts des log. der Seite das Gewicht der Seite selbst, in den beiden Annahmen

$$P = 12.02, \text{ und } = 7.643$$

auch mit Gauss befriedigend übereinstimmend.

Suppl. 2. Von der Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen.

1.

Im Art. 138 der Abhandlung habe ich ausgeführt, wie man durch Winkel, die zu diesem Zweck eigends gemessen worden sind, die Gewichte bestimmen kann, die den verschiedenen Beobachtungen beizulegen sind, wenn man in den Fall kommt bei einer Triangulation verschiedene Gattungen von Beobachtungen von einander unterscheiden zu müssen. Zugleich habe ich dort angedeutet, dass man sich zu demselben Zwecke der bei der Triangulation beobachteten Richtungen bedienen kann; diese Bestimmnng soll hier ausführlich behandelt werden.

2.

Die in der Abhandlung eingeführten, mit p, p', etc. $p_{,}$, $p_{,}'$, etc. etc. bezeichneten Gewichte der Beobachtungen l, l', etc. $l_{,}$, $l_{,}'$, etc. etc. sind den Quadraten der mittleren Fehler, womit diese Beobachtungen an sich, und abgesehen von ihrer Verwendung zu irgend einem Zwecke, als behaftet angesehen werden müssen, umgekehrt proportional. Diese mittleren Fehler und die Verhältnisse der ihnen zugehörigen Gewichte haben daher bestimmte Werthe, dermaassen dass jeder vorhandenen Gattung von Beobachtnngen, unabhängig von der Verwendung derselben zu irgend einem Zwecke ein bestimmter Werth dieses mittleren Fehlers zukommt.

Da die entsprechenden Gewichte, oder Gewichtsverhältnisse auf welche es hier eigentlich ankommt, mit diesen mittleren Fehlern in so enger und einfacher Beziehung stehen, so besteht unsere gegenwärtige Aufgabe ihrem wesentlichen Inhalt nach darin, die genannten mittleren Fehler aus den Beobachtungen zu ermitteln. Ich will diese mittleren Fehler, um sie von denen zu unterscheiden, die nach der Anwendung der Beobachtungen auf irgend eine Aufgabe erhalten werden, die mittleren Fehler der nackten Beobachtungen nennen.

Jede Verwendung der Beobachtungen zu irgend einem Zwecke, oder mit anderen Worten, jede Anwendung der Beobachtungen zur Lösung einer Aufgabe führt zwar auch auf die Bestimmung des mittleren

Fehlers der dazu verwandten Beobachtungen, aber dieser mittlere Fehler, den man erst am Schlusse aller zur Lösung der Aufgabe erforderlichen Rechnungen erhält, ist von dem mittleren Fehler der nackten Beobachtungen verschieden, der dem Obigen zu Folge zur Berechnung des betreffenden Gewichts p dient. Der jetzt genannte mittlere Fehler besteht aus einer Combination des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen mit der Wirkung der theoretischen Bedingungen, die die Aufgabe, auf welche die Beobachtungen angewandt werden, mit sich führt; er involvirt gemeiniglich auch neue Fehlerquellen, die bei der Betrachtung der Beobachtungen an sich nicht mit einwirken.

Beobachtungen, die an sich gleiche Güte besitzen, oder welchen dasselbe Gewicht p zukommt, können wenn sie auf verschiedene specielle Fälle Einer Aufgabe, oder auf verschiedene Aufgaben angewandt werden, nach der Anwendung eine mehr oder minder grosse Verschiedenheit in den aus der Aufgabe hervorgehenden oder berechneten mittleren Fehlern zeigen, und dieses tritt namentlich ein, wenn in der Aufgabe mehrere Unbekannten vorkommen, die von einander abhängig sind, und durch Beobachtungen, die von einander unabhängig sind bestimmt werden müssen. Die Bedeutung dieser, durch die Auflösung einer Aufgabe erhaltenen mittleren Fehler kann nie auf die Beobachtungen an sich, oder auf die mittleren Fehler der nackten Beobachtungen, bezogen werden, sondern er bildet blos die Grundlage zur Bestimmung der mittleren Fehler der Resultate, die man durch Anwendung der Beobachtungen auf die betreffende Aufgabe erhalten hat.

3.

Es ist daher, um zu einem bestimmten Falle überzugehen, schon aus den eben erklärten Gründen unrichtig bei der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes die durch die Ausgleichungen auf den Stationen erlangten Summen der Fehlerquadrate, die in der Abhandlung allgemein mit (ll,n) bezeichnet worden sind, zur Bestimmung des mittleren Fehlers oder des Gewichts p der nackten Beobachtungen zu verwenden, denn diese (ll,n) bestehen schon aus einer Combination des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen mit den Bedingungen zwischen den verschiedenen Unbekannten, die die Aufgabe der Ausgleichung auf der Station, aus welcher eben (ll,n) hervorgeht, eingeführt hat; Bedingungen, die in der Regel auf jeder Station verschieden sind.

4.

Aber im eben betrachteten Falle lässt sich für die Unhaltbarkeit der Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen aus den (ll,n) noch ein anderer Grund anführen. Es ist leicht nachzuweisen, dass die (ll,n) keines Weges unveränderliche, feststehende Grössen sind, sondern dass im Belieben des Rechners steht ihnen manigfache Werthe zuzutheilen. Man hat in § 3 der Abhandlung gesehen, dass es in der Auflösung der allgemeinen Aufgabe, von welcher die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes ein specieller Fall ist, unter Umständen nothwendig werden kann, bei der Bildung des Systems von Gleichungen, deren Auflösnng den ersten Theil der Auflösung der Aufgabe überhaupt ausmacht, Eine oder mehrere der Bedingungsgleichungen mit zu verwenden, und dass man in jedem Falle, auch wenn es nicht nothwendig wird, zu einer solchen Verwendung der Bedingungsgleichungen berechtigt ist, durch welche die Endresultate der Auflösung nicht im Mindesten geändert werden. Es ist dieses a. a. O. nicht nur theoretisch bewiesen, sondern auch durch das Beispiel des Art. 56, u. f. dargethan worden. In der geodätischen Anwendung der allgemeinen Aufgabe, oder in der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes darf man daher auch zu den Ausgleichungen auf den Stationen nach Belieben Eine oder mehrere der vorhandenen Bedingungsgleichungen hinzuziehen, obgleich dieses hier nicht nothwendig wird.

5.

Die Bedingungsgleichungen, auf welche diese Aufgabe führt, enthalten immer Richtungen von wenigstens drei Stationen, und durch die Zuziehung von Einer oder mehreren derselben zu den Ausgleichungen auf den betreffenden Stationen, kann man die Ausgleichung von drei oder mehreren Stationen mit einander verbinden, und zu Einem gemeinschaftlichen Resultat vereinigen. Es ist leicht einzusehen, dass hierauf Werthe hervorgehen müssen, die von denen wesentlich verschieden sind, die durch die Einzelnbehandlung dieser Stationen erhalten worden wären, die aber demungeachtet mit diesen gleiche Berechtigung haben. Nicht nur die auf diesen Stationen ausgeglichenen Richtungen, sondern auch, worauf es hier besonders ankommt, der Werth von $(ll.n)$ wird ein anderer, und es wird folglich die Verwendung dieses Werthes zur

Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen ein anderes Resultat geben, wie in dem Falle, wo keine Bedingungsgleichung zur Ausgleichung auf den Stationen verwandt worden ist.

6.

Durch die erklärte Zuziehung von Bedingungsgleichungen werden nicht nur die Resultate des ersten Theils der Auflösung der Aufgabe, sondern zugleich auch die des zweiten Theils derselben geändert, und zwar letztere so, dass schliesslich dieselben Endresultate zum Vorschein kommen, die man ohne die genannte Zuziehung erhalten haben würde. Es werden also namentlich nicht blos die Werthe der (ll,n), sondern es wird auch der Werth von R_q anders werden, aber diese Aenderungen werden stets so beschaffen sein, dass der aus der ganzen Rechnung hervorgehende Werth der Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate, nemlich

$$W = \Sigma(ll,n) + R_q$$

in jedem speciellen Falle unverändert derselbe bleibt. Unter den verschiedenen in dieser Aufgabe vorkommenden Summen von Fehlerquadraten ist daher in jedem vorliegenden Falle (d. h. in jedem zu behandelnden Dreiecksnetze) nur W diejenige, die einen bestimmten Werth hat, während alle (ll,n) nebst R_q, je nach der Behandlung der Aufgabe, sehr verschiedene Werthe annehmen können.

Da nun die mittleren Fehler der nackten Beobachtungen, der oben gegebenen Erklärung derselben zu Folge, auch feste und unveränderliche Werthe besitzen, so können um so weniger die erhaltenen Werthe der (ll,n) zu deren Bestimmung angewandt werden.

7.

Wenn man etwa hiezu bemerken wollte, dass die ohne Zuziehung von Bedingungsgleichungen erhaltenen Werthe von (ll,n) einen Vorzug vor denen voraus hätten, die sich nach dieser Zuziehung ergeben, und daher vorzugsweise zur Bestimmung der mittleren Fehler der nackten Beobachtungen zu verwenden wären, so lassen sich diesem die folgenden Betrachtungen entgegenstellen. Die durch die im Vorhergehenden erklärten, combinirten Ausgleichungen auf den Stationen erhaltenen Werthe der (ll,n) haben in der in Rede stehenden Aufgabe dieselbe theoretische sowohl, wie praktische, Berechtigung wie jene aus den

Einzelnausgleichungen auf den Stationen hervorgehenden Werthe derselben Grössen. Wenn daher die Einen Werthe Berechtigung zur Bestimmung der genannten mittleren Fehler haben, so haben die Andern dieselbe Berechtigung auch. Da aber diese Werthe von einander verschieden sind, so werden auch verschiedene Werthe der mittleren Fehler daraus hervorgehen, welches unannehmbar ist, da es in der Natur der Sache liegt, dass diesen feste und unveränderliche Werthe zukommen müssen.

8.

Um nun aus den bei einer hinreicheud ausgedehnten Triangulation beobachteten Richtungen die Quadrate der mittleren Fehler zu erhalten, bietet sich zunächst das folgende Verfahren dar. Man ordne auf jeder Station die vorhandenen Gyri auf dieselhe Weise, wie zur Ausgleichung des Dreiecksnetzes erforderlich ist, nemlich man stelle sie in solche Gruppen zusammen, dass die in jeder dieser vorkommenden Richtungen ohne Lücken vorhanden sind. Aus jeder Gruppe bilde man so viele unabhängige Winkel wie möglich, aus welchen hierauf, so wie im Art. 138 erklärt worden ist, das Quadrat des mittleren Fehlers zu herechnen ist.

Dieses Verfahren ist jedoch nicht das Vortheilhafteste. Denn bezeichnet man die in irgend einer Gruppe von Gyris enthaltenen Richtungen mit (1), (2), (3), etc., so kann man höchstens nur die halbe Anzahl von unabhängigen Winkeln erhalten, da keine Richtung zu zwei oder mehr Winkeln verwandt werden darf. Man kann die Winkel

$$(2)-(1),\ (4)-(3),\ (6)-(5),\ \text{etc.}$$
$$\text{oder } (3)-(1),\ (4)-(2),\ (7)-(5),\ \text{etc.}$$

u. s. w. bilden, und erkennt leicht, dass in den Fällen, in welchen die Zahl der vorhandenen Richtungen ungrade ist, eine derselben zum vorliegenden Zweck unbenutzt übrig bleibt. Es ist aber ein anderes Verfahren möglich, durch welches alle vorhandenen Richtungen vortheilhafter benutzt werden. Dieses soll im Folgenden erklärt werden.

9.

Das Verfahren des vor. Art. setzt stillschweigend voraus, dass man allen auf der Station beobachteten Richtungen dasselbe Gewicht beilegt, und da dieses durchgängig zulässig ist, und man selten oder nie sich in den Stand gesetzt sieht, etwaige reelle Unterschiede der Güte solcher

Beobachtungen gnügend unterscheiden und bestimmen zu können, so soll diese Annahme hier ausdrücklich beibehalten werden. In Folge dessen, wird man nun vor Allem aus den Beobachtungen einer jeden Richtung in jedem der vorhandenen Gyri das arithmetische Mittel nehmen, und dieses von allen betr. Beobachtungen abziehen müssen. Mit diesen Unterschieden ist dann weiter zu verfahren. Einen wesentlichen Umstand bildet hiebei die Eigenschaft, dass der gemeinschaftliche Anfangspunkt aller Beobachtungen eines jeden Gyrus eine unbestimmte Grösse ist, und man dem zu Folge vor der Vornahme der oben beschriebenen Rechnung die einzelnen Gyri in Bezug auf ihren Anfangspunkt nur nach Gutdünken hat aufstellen können. Jeder der eben erklärten Unterschiede besteht daher aus der Summe von zwei Fehlern, nemlich aus dem eigentlichen Beobachtungsfehler und dem Fehler, den man bei der willkührlichen Annahme des gemeinschaftlichen Anfangspunkts des betr. Gyrus begangen hat. Seien für den ersten Gyrus, und für die verschiedenen Richtungen der erst genannte Fehler ξ, ξ', ξ'', etc. der andere v, für den zweiten Gyrus dieselben $\xi_{,}$, $\xi'_{,}$, $\xi''_{,}$, etc. nebst $v_{,}$, u. s. w. dann haben die oben beschriebenen Unterschiede die Form

$$\xi + v\,,\ \xi' + v\,,\ \xi'' + v\,,\ \text{etc.}$$
$$\xi_{,} + v_{,}\,,\ \xi'_{,} + v_{,}\,,\ \xi''_{,} + v_{,}\,,\ \text{etc.}$$
$$\xi_{,,} + v_{,,}\,,\ \xi'_{,,} + v_{,,}\,,\ \xi''_{,,} + v_{,,}\,,\ \text{etc.}$$

u. s. w. Sei nun n die Anzahl der Richtungen, die in jedem Gyrus der betreffenden Gruppe enthalten sind, und

$$\mu = \frac{\xi + \xi' + \xi'' + \ldots}{n}$$
$$\mu_{,} = \frac{\xi_{,} + \xi'_{,} + \xi''_{,} + \ldots}{n}$$
etc.

dann sind die arithmetischen Mittel aus den vorstehenden Unterschieden jeder Zeile

$$\mu + v$$
$$\mu_{,} + v_{,}$$
$$\mu_{,,} + v_{,,}$$
etc.

und zieht man diese von jenen ab, so erhält man

$$\xi - \mu\,,\ \xi' - \mu\,,\ \xi'' - \mu\,,\ \text{etc.}$$
$$\xi_{,} - \mu_{,}\,,\ \xi'_{,} - \mu_{,}\,,\ \xi''_{,} - \mu_{,}\,,\ \text{etc.}$$
$$\xi_{,,} - \mu_{,,}\,,\ \xi'_{,,} - \mu_{,,}\,,\ \xi''_{,,} - \mu_{,,}\,,\ \text{etc.}$$
etc.

für die eigentlichen Fehler der Beobachtungen, da hieraus die Unbestimmtheit, die der gemeinschaftliche willkührliche Anfangspunkt eines jeden Gyrus darbietet, vollständig entfernt ist. Um dieses deutlicher zu machen will ich annehmen, dass man allen Beobachtungen irgend eines der Gyri, vor der Berechnung des arithmetischen Mittels aus den Beobachtungen, z. B. des ersten Gyrus die willkührliche Anzahl von x Secunden hinzugefügt habe. Man wird hierauf statt der oben angegebenen ersten Unterschiede die folgenden erhalten haben.

$$\xi + v + \frac{m-1}{m}x, \quad \xi' + v + \frac{m-1}{m}x, \quad \xi'' + v + \frac{m-1}{m}x, \text{ etc.}$$

$$\xi_{,} + v_{,} - \frac{x}{m}, \quad \xi'_{,} + v_{,} - \frac{x}{m}, \quad \xi''_{,} + v_{,} - \frac{x}{m}, \text{ etc.}$$

$$\xi_{,,} + v_{,,} - \frac{x}{m}, \quad \xi'_{,,} + v_{,,} - \frac{x}{m}, \quad \xi''_{,,} + v_{,,} - \frac{x}{m}, \text{ etc.}$$

etc.

und die arithmetischen Mittel aus den Grössen jeder Zeile werden jetzt

$$\mu + v + \frac{m-1}{m}x$$

$$\mu_{,} + v_{,} - \frac{x}{m}$$

$$\mu_{,,} + v_{,,} - \frac{x}{m}$$

etc.

Zieht man diese von jenen ab, so erhält man dieselben Unterschiede wie oben. W. z. b. w.

10.

Das Verfahren des vor. Art. giebt für die Anwendung die Berechnung nach folgenden Formeln. Seien l, l', l'', etc. die Beobachtungen des ersten Gyrus, $l_{,}$, $l'_{,}$, $l''_{,}$. etc. die des zweiten Gyrus, $l_{,,}$, $l'_{,,}$, $l''_{,,}$, etc. die des dritten Gyrus u. s. w. Alle diese Beobachtungen können in Bezug auf den gemeinschaftlichen Anfangspunkt jedes Gyrus ganz willkührlich aufgestellt werden. zweckmässig ist jedoch sie durch Anbringung einer constanten Zahl für jeden Gyrus so zu stellen, dass sie für jede Richtung nur kleine Unterschiede zeigen. Nennt man ferner m die Anzahl der Gyri die in der Gruppe enthalten sind, so rechne man erst

$$p = \frac{l + l_{,} + l_{,,} + \ldots}{m}$$

$$p' = \frac{l' + l'_{,} + l'_{,,} + \ldots}{m}$$

$$p'' = \frac{l'' + l''_{,} + l''_{,,} + \ldots}{m}$$

etc.

und hiemit

$$l - p \;,\; l_{,} - p \;,\; l_{,,} - p \;,\; \text{etc.}$$
$$l' - p' \;,\; l'_{,} - p' \;,\; l'_{,,} - p' \;,\; \text{etc.}$$
$$l'' - p'' \;,\; l''_{,} - p'' \;.\; l''_{,,} - p'' \;,\; \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

die man am Zweckmässigsten in der vorstehenden Aufeinanderfolge niederschreibt. Es sind hierauf die folgenden Mittel zu rechnen,

$$q = \frac{(l - p) + (l' - p') + (l'' - p'') + \ldots}{n}$$
$$q_{,} = \frac{(l_{,} - p) + (l'_{,} - p') + (l''_{,} - p'') + \ldots}{n}$$
$$q_{,,} = \frac{(l_{,,} - p) + (l'_{,,} - p') + (l''_{,,} - p'') + \ldots}{n}$$
$$\text{etc.}$$

wenn wieder n die Anzahl der Richtungen bedeutet. Die von der Wirkung der allgemeinen Anfangspunkte befreiten, eigentlichen Beobachtungsfehler werden hierauf

$$l - p - q \;;\; l' - p' - q \;,\; l'' - p'' - q \;,\; \text{etc.}$$
$$l_{,} - p - q_{,} \;,\; l'_{,} - p' - q_{,} \;,\; l''_{,} - p'' - q_{,} \;,\; \text{etc.}$$
$$l_{,,} - p - q_{,,} \;,\; l'_{,,} - p' - q_{,,} \;,\; l''_{,,} - p'' - q_{,,} \;,\; \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Ich bemerke hiezu noch, dass man die Aufeinanderfolge der Mittel umwechseln und setzen kann,

$$q = \frac{l + l' + l'' + \ldots}{n}$$
$$q_{,} = \frac{l_{,} + l'_{,} + l''_{,} + \ldots}{n}$$
$$q_{,,} = \frac{l_{,,} + l'_{,,} + l''_{,,} + \ldots}{n}$$
$$\text{etc.}$$

$$p = \frac{(l - q) + (l_{,} - q_{,}) + (l_{,,} - q_{,,}) + \ldots}{m}$$
$$p' = \frac{(l' - q) + (l'_{,} - q_{,}) + (l'_{,,} - q_{,,}) + \ldots}{m}$$
$$p'' = \frac{(l'' - q) + (l''_{,} - q_{,}) + (l''_{,,} - q_{,,}) + \ldots}{m}$$
$$\text{etc.}$$

Dieses Verfahren führt auf dieselben Werthe der $(l - p - q)$, $(l' - p' - q)$, etc. etc. Beide Verfahrungsarten stehen mit dem im Art. 68 der Abhandlung bewiesenen Satze in engster Verbindung.

11.

Sei

$$\begin{aligned} M = & (l-p-q)^2 + (l'-p'-q)^2 + (l''-p''-q)^2 + \dots \\ & + (l_{,}-p-q_{,})^2 + (l'_{,}-p'-q_{,})^2 + (l''_{,}-p''-q_{,})^2 + \dots \\ & + (l_{,,}-p-q_{,,})^2 + (l'_{,,}-p'-q_{,,})^2 + (l''_{,,}-p''-q_{,,})^2 + \dots \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

so kann M dem vor. Art. zufolge auf zwei verschiedene Arten berechnet werden. Aber diese Function zweiter Ordnung kann nach bekannten Sätzen auf verschiedene andere Formen gebracht werden. Ich werde hier drei solcher Formen angeben. Löst man die Quadrate dergestalt auf, dass die q von den $l-p$ getrennt werden, und setzt zur Abkürzung

$$\begin{aligned} L &= l - p\,,\quad L' = l' - p'\,,\quad L'' = l'' - p''\,,\ \text{etc.} \\ L_{,} &= l_{,} - p\,,\quad L'_{,} = l'_{,} - p'\,,\quad L''_{,} = l''_{,} - p''\,,\ \text{etc.} \\ L_{,,} &= l_{,,} - p\,,\quad L'_{,,} = l'_{,,} - p'\,,\quad L''_{,,} = l''_{,,} - p''\,,\ \text{etc.} \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

so ergiebt sich zuerst

$$\begin{aligned} M = & L^2 + L'^2 + L''^2 + \dots - 2q(L + L' + L'' + \dots) \\ & + L_{,}^2 + L'^2_{,} + L''^2_{,} + \dots - 2q_{,}(L_{,} + L'_{,} + L''_{,} + \dots) \\ & + L_{,,}^2 + L'^2_{,,} + L''^2_{,,} + \dots - 2q_{,,}(L_{,,} + L'_{,,} + L''_{,,} + \dots) \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad - \text{etc.} \\ & + n(q^2 + q_{,}^2 + q_{,,}^2 + \dots) \end{aligned}$$

und hieraus vermittelst der ersten Ausdrücke der q des vor. Art.

$$M = \left\{\begin{matrix} L^2 + L'^2 + L''^2 + \dots \\ + L_{,}^2 + L'^2_{,} + L''^2_{,} + \dots \\ + L_{,,}^2 + L'^2_{,,} + L''^2_{,,} + \dots \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right\} - \frac{\left\{\begin{matrix} (L + L' + L'' + \dots)^2 \\ + (L_{,} + L'_{,} + L''_{,} + \dots)^2 \\ + (L_{,,} + L'_{,,} + L''_{,,} + \dots)^2 \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right\}}{n}$$

wo

$$\begin{aligned} p &= \frac{l + l_{,} + l_{,,} + \dots}{m} \\ p' &= \frac{l' + l'_{,} + l'_{,,} + \dots}{m} \\ p'' &= \frac{l'' + l''_{,} + l''_{,,} + \dots}{m} \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

zu setzen ist. Trennt man die p von den $l-q$, so bekommt man auf dieselbe Art, wenn man

$$\begin{array}{lll} \Delta = l - q\,, & \Delta_{,} = l_{,} - q_{,}\,, & \Delta_{,,} = l_{,,} - q_{,,}\,, \text{ etc.} \\ \Delta' = l' - q\,, & \Delta'_{,} = l'_{,} - q_{,}\,, & \Delta'_{,,} = l'_{,,} - q_{,,}\,, \text{ etc.} \\ \Delta'' = l'' - q\,, & \Delta''_{,} = l''_{,} - q_{,}\,, & \Delta''_{,,} = l''_{,,} - q_{,,}\,, \text{ etc.} \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

setzt

$$M = \left\{\begin{array}{l} \Delta^2 + \Delta_{,}^2 + \Delta_{,,}^2 + \ldots \\ + \Delta'^2 + \Delta'^2_{,} + \Delta'^2_{,,} + \ldots \\ + \Delta''^2 + \Delta''^2_{,} + \Delta''^2_{,,} + \ldots \\ + \text{ etc.} \end{array}\right\} - \frac{\left\{\begin{array}{l} (\Delta + \Delta_{,} + \Delta_{,,} + \ldots)^2 \\ + (\Delta' + \Delta'_{,} + \Delta'_{,,} + \ldots)^2 \\ + (\Delta'' + \Delta''_{,} + \Delta''_{,,} + \ldots)^2 \\ + \text{ etc.} \end{array}\right\}}{m}$$

wo

$$q = \frac{l + l' + l'' + \ldots}{n}$$
$$q_{,} = \frac{l_{,} + l'_{,} + l''_{,} + \ldots}{n}$$
$$q_{,,} = \frac{l_{,,} + l'_{,,} + l''_{,,} + \ldots}{n}$$
etc.

zu setzen ist. Aus der einen oder der anderen der beiden vorstehenden Formen bekommt man, wenn man auch die p, oder bez. die q von den l trennt, auf dieselbe Art

$$M = \left\{\begin{array}{l} l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots \\ + l_{,}^2 + l'^2_{,} + l''^2_{,} + \ldots \\ + l_{,,}^2 + l'^2_{,,} + l''^2_{,,} + \ldots \\ + \text{ etc.} \end{array}\right\} - \frac{\left\{\begin{array}{l} (l + l' + l'' + \ldots)^2 \\ + (l_{,} + l'_{,} + l''_{,} + \ldots)^2 \\ + (l_{,,} + l'_{,,} + l''_{,,} + \ldots)^2 \\ + \text{ etc.} \end{array}\right\}}{n}$$

$$- \frac{\left\{\begin{array}{l} (l + l_{,} + l_{,,} + \ldots)^2 \\ + (l' + l'_{,} + l'_{,,} + \ldots)^2 \\ + (l'' + l''_{,} + l''_{,,} + \ldots)^2 \\ + \text{ etc.} \end{array}\right\}}{m} + \frac{\left\{\begin{array}{l} l + l_{,} + l_{,,} + \ldots \\ + l' + l'_{,} + l'_{,,} + \ldots \\ + l'' + l''_{,} + l''_{,,} + \ldots \\ + \text{ etc.} \end{array}\right\}^2}{mn}$$

unter welchen fünf Berechnungsarten von M man nach Belieben wählen kann, da sie alle identisch sind. Ich wiederhole, dass wie im vor. Art. n die Anzahl der Richtungen und m die Anzahl der einzelnen Gyri in der betreffenden Gruppe von Gyris bedeuten.

12.

Die durch das oben beschriebene Verfahren erlangten Beobachtungsfehler $(l - p - q)$, etc. müssen nun zufolge des im Art. 1 der

Abhandlung aufgestellten Grundsatzes als die wahrscheinlichsten Fehler der Beobachtungen angesehen werden, und da sie aus den blossen Beobachtungen, ohne Zuziehung irgend eines anderen Zweckes erlangt worden sind, so sind sie die wahrscheinlichsten Fehler der nackten Beobachtungen. Man bekommt aus ihnen den mittleren Fehler der nackten Beobachtungen nach Massgabe des Ausdrucks des Art. 150 für den mittleren Fehler überhaupt, und nennt man diesen hier μ, so wird

$$\mu = \sqrt{\frac{M}{D}}$$

wo D so zu berechnen ist, wie a. a. O. angegeben ist. In Bezug darauf kann angeführt werden, dass im gegenwärtigen Falle immer die Gleichungen

$$(Ab) = 0\,,\ (As) = 1\,,\ (Al) = (Ax)(Au)$$

statt finden. Der Ausdruck von (As) bedeutet nemlich nun nicht die einzige Station, sondern die einzige Gruppe von Gyris, die hier immer für sich allein in Betracht gezogen wird, und der Ausdruck (Au) bedeutet jetzt die Anzahl der einzelnen Gyri in der betrachteten Gruppe von Gyris.

13.

Dio Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen durch eine einzige Gruppe von Gyris kann nie als hinreichend genau betrachtet werden.

Man muss bei dieser Bestimmung stets den Umstand vor Augen behalten, dass der oben angegebene Ausdruck ein genäherter ist, dessen Ableitung voraussetzt, dass im Ausdruck des Zählers desselben alle möglichen Fehler vertreten sind. Bei einer kleinen Anzahl von Beobachtungen ist dieses nun selbstverständlich immer am Wenigsten der Fall, während das Grundprincip der Wahrscheinlichkeitsrechnung (S. Art. 1 der Abhandlung) anzeigt, dass diese Bedingung sich desto mehr erfüllen wird, je grösser die Anzahl der Beobachtungen ist, die zur Bildung des Zählers M beigetragen haben. Eine Bestimmung des mittleren Fehlers aus einer kleinen Anzahl von Beobachtungen kann daher so sehr vom wahren dieser Grösse abweichen, dass sie kaum für eine genäherte Bestimmung derselben gehalten werden kann. Die zufälligen Fehler, die in einer kleinen Anzahl von Beobachtungen vorkommen, überwiegen einestheils durch ihre zufällige Beschaffenheit, ob sie zufällig gross oder ob sie zufällig klein sind, und anderntheils dadurch dass sie einen nur

kleinen Divisor bekommen. Je grösser aber die Zahl der Beobachtungen ist, die zu dieser Bestimmung verwandt wird, desto mehr gleichen sich die Zufälligkeiten aus, und desto mehr tritt der wahre Werth hervor, dessen Genauigkeit überdies durch den wachsenden Werth des Divisors vergrössert wird.

Man darf daher bei der Bestimmung eines mittleren Fehlers überhaupt nur in dem Falle auf die Sicherheit der Bestimmung rechnen, wenn eine grosse Anzahl von Beobachtungen, hier eine grosse Anzahl von Gruppen von Gyris, dazu verwandt worden ist, und es soll daher angenommen werden, dass auf der Station ausser der Gruppe von Gyris die M und D gegeben hat, noch mehrere vorhanden sind, die bez. M' und D', M'' und D'', etc. gegeben haben. Sicherer wird diese Bestimmung noch, wenn mehrere Stationen vorhanden sind, für welche man berechtigt ist, die Beobachtungen derselben Gattung zuzuzählen, welcher jene angehören. Um diesen Fall, der eigentlich zur sicheren Bestimmung des mittleren Fehlers immer vorhanden sein muss, mit Leichtigkeit in die gegenwärtigen Betrachtungen einschliessen zu können, sollen schliesslich statt der obigen Bezeichnungen die folgenden M_s und D_s, M_s' und D_s', M_s'' und D_s'', etc. eingeführt werden, und es wird daher vorausgesetzt, dass man in hinreichender Anzahl die einzelnen Bestimmungen

$$\mu^2 = \frac{M_s}{D_s}\ , \ \mu^2 = \frac{M'_s}{D'_s}\ , \ \mu^2 = \frac{M''_s}{D''_s}\ , \ \text{etc.}$$

erhalten habe, in welchen s verschiedene Werthe annimmt.

14.

Um die zweckmässigste Verbindung dieser Einzelnbestimmungen zu einem Endresultat anzugeben, kann man sich des mittleren zu befürchtenden Fehlers bedienen, den Gauss für die Bestimmung des Quadrats des mittleren Fehlers entwickelt hat; da dieser aber zu verwickelt ausfällt, so kann man die Grenzen desselben, die auch von Gauss angegeben worden sind, zu diesem Zwecke anwenden. Nimmt man die weiteren Grenzen, so ist das Quadrat des mittleren, in der Bestimmung von μ^2 zu befürchtenden Fehlers

$$= \frac{2\mu^4}{D}$$

*) und das Gewicht der Bestimmung von μ^2 ist diesem umgekehrt pro-

*) S. Gauss, Theoria combinationis observationum etc. letzter Artikel.

portional. Da in diesem Ausdruck unter μ dessen wahrer Werth verstanden werden muss, welcher für jede Gattung von Beobachtungen unveränderlich ist, und die Gewichte Verhältnisszahlen sind, so ergiebt sich hieraus, dass für die Gewichte der Einzelnbestimmungen des vor. Art. bez. D_s, D_s', D_s'', etc. angenommen werden können, und hieraus folgt vermöge der Gleichung (9) der Abhandlung das Endresultat

$$\mu^2 = \frac{\Sigma\{M_s + M_s' + M_s'' + \ldots\}}{\Sigma\{D_s + D_s' + D_s'' + \ldots\}}$$

wo die Summenzeichen sich auf s beziehen. Auf diese Weise sprechen auch die Bestimmungen, die, weil sie auf einer geringen Anzahl von Beobachtungen beruhen, einzeln und für sich betrachtet, nur geringen oder gar keinen Werth haben, auf geeignete Weise mit, und tragen das Ihrige zur sicheren Bestimmung des mittleren Fehlers auf angemessene Art bei.

15.

Wenn in einer Triangulation alle Beobachtungen der Richtungen in Eine Klasse gestellt, und folglich Allen dasselbe Gewicht, welches $= 1$ gesetzt werden kann, beigelegt werden darf, so haben die im Vorhergehenden entwickelten Bestimmungen höchstens den Zweck die Güte der Beobachtungen an sich kennen zu lernen, und ihre Ausführung kann, wenn hiefür kein besonderer Grund vorhanden ist, unterlassen werden. Wenn aber auf verschiedenen Stationen verschiedene Gattungen von Beobachtungen angenommen werden müssen, dann tritt die Nothwendigkeit ihrer Ausführung ein.

Schreibt man zur Abkürzung für die rechte Seite des letzten Ausdrucks des vor. Art. K, so dass allgemein $\mu^2 = K$ wird, so bekommt man für die Stationen, deren Beobachtungen das Gewicht π beizulegen ist, die Gleichung

$$\frac{c}{\pi} = K$$

wo c eine beliebige Constante ist. Auf dieselbe Weise wird man für andere Stationen, auf welchen andere Gattungen von Beobachtungen vorkommen, die durch das im Vorhergehenden erklärte Verfahren K', K'', etc. statt K gegeben haben, die Gleichungen

$$\frac{c}{\pi'} = K', \quad \frac{c}{\pi''} = K'', \text{ etc.}$$

erhalten, wenn π', π'', etc. die Gewichte bezeichnen, die den Beobachtungen dieser Stationen beizulegen sind. Hieraus folgen

$$\pi' = \pi \frac{K}{K'}, \quad \pi'' = \pi \frac{K}{K''}, \text{ etc.}$$

oder da Ein Gewicht willkührlich ist, und man demnach

$$\pi = 1$$

setzen darf *),

$$\pi' = \frac{K}{K'}, \quad \pi'' = \frac{K}{K''}, \text{ etc.}$$

womit die Gewichte aller vorhandenen, verschiedenen Gattungen von Beobachtungen bestimmt sind, und man die Producte

$$(1.1)_s . \pi_s, \ (2.2.1)_s . \pi_s, \ (3.3.2)_s . \pi_s, \text{ etc. } (ll,n)_s \pi_s$$

berechnen kann, die zufolge des Art. 138 der Abhandlung im zweiten Theile der Auflösung gebraucht werden.

16.

Zur Berechnung von M sind noch einige Bemerkungen zu machen. Die Correctionen, die eine mit einem Theodoliten eingeschnittene Richtung verlangt, sind wenn man von den Theilungsfehlern des Kreises, und einem etwa durch das Niveau desselben angezeigten Mangel an Verticalität in der Stellung der Drehungsachse vorläufig absieht, durch den folgenden Ausdruck gegeben,

$$c \sec\theta + c' \operatorname{tg}\theta$$

in welchem $90^0 - c$ den Winkel zwischen der Absehungslinie und der Achse des Fernrohrs, $90^0 - c'$ den Winkel zwischen der Achse des Fernrohrs und der Achse der Alhidade, und θ den Winkel bezeichnet, den die Absehenslinie während der Beobachtung mit der Ebene des Horizontalkreises macht, (den Höhenwinkel des einzuschneidenden Punkts). Ausserdem hat die Erfahrung angezeigt, dass zuweilen während der Beobachtungen eine kleine Drehung des Stativs, gemeiniglich von Osten nach Westen, statt findet. Auch kommt die Correction in Betracht, die wegen etwaiger Excentricität des Fernrohrs erforderlich ist.

Die letzt genannte Correction anbelangend, die

$$\frac{r}{R} \, 206265'' \sec\theta$$

zum Ausdruck hat, wenn R die Entfernung des Gegenstandes vom Theodoliten, und r die kürzeste Entfernung der Absehenslinie vom Mittelpunkt des Theodoliten bezeichnen, ist es klar, dass sie aus dem

*) Die Bestimmung, die man hie und da findet, dass die Einheit des Gewichts solchen Beobachtungen entsprechen soll, deren mittlerer Fehler 1″ beträgt, hat gar keinen inneren Grund, und ist als unzweckmässig zu verwerfen; statt dessen ist für irgend eine der wirklich vorhandenen Gattungen von Beobachtungen $\pi = 1$ zu setzen.

Resultat verschwindet, wenn man einestheils aus den Beobachtungen mit dem Fernrohr linker Hand, anderntheils aus denen mit dem Fernrohr rechter Hand die Mittel, und aus diesen Mitteln wieder das Mittel nimmt. Sind in jeder dieser beiden Lagen gleich viele Beobachtungen angestellt, so verschwindet die Correction ohne Weiteres aus dem Mittel aus allen Beobachtungen. Aber auch die beiden von c und c' abhängigen Correctionen verschwinden durch dasselbe Verfahren, vorausgesetzt dass man bei der Veränderung der Lage des Fernrohrs dieselben Zapfen der Fernrohrsachse in denselben Lagern belassen hat.

Denn durch diese Aenderung wird bewirkt, dass der Winkel θ sich in $180^0-\theta$ verwandelt, und folglich die obige Correctionsformel in

$$-c\sec\theta - c'\operatorname{tg}\theta$$

übergeht. Wollte man zugleich mit der genannten Aenderung die Zapfen der Fernrohrsachse in die entgegengesetzten Lager bringen, so würde nur das erste Glied des vorstehenden Ausdrucks sein Zeichen ändern, also die Correction nicht ganz verschwinden.

Dem schädlichen Einfluss einer etwaigen Drehung des Stativs auf die Beobachtungen beugt man dadurch möglichst vor, dass man von Gyrus zu Gyrus abwechselnd von der linken zur rechten, und von der rechten zur linken die Gegenstände nach und nach einschneidet.

Wenn man sich daher zur Regel macht, die vorbenannten Abänderungen zusammen genommen abwechselnd von Gyrus zu Gyrus eintreten zu lassen, so sind die Summen der Beobachtungen und die Mittel daraus von den erwähnten Fehlern unabhängig.

Die Berücksichtigung der Theilungsfehler wird am vollkommensten, wenn sie im Voraus für die anzuwendenden Theodoliten besonders ermittelt worden sind, wenn dieses aber nicht der Fall ist, so bleibt nichts weiter übrig als vor Anfang eines jeden Gyrus den Nullpunkt auf dem Kreise zu verändern, wodurch man hoffen darf, dass die Wirkung der Theilungsfehler im Ganzen vermindert wird. Eine etwa hierauf übrig bleibende Wirkung der Theilungsfehler ist unter diesen Umständen nicht zu vermeiden.

Wenn das Nivellement des Theodoliten nicht vollständig ausgeführt worden ist, so muss man, um die desfallsige Correction der beobachteten Richtungen berechnen zu können, die Neigung Δi des Horizontalkreises gegen den Horizont, und die Ablesung ϱ ermitteln, die dem höchsten Punkt dieses Kreises entspricht. Beide diese Data können nur durch das

Niveau bestimmt werden, und zwar Δi mit grosser Genauigkeit, aber ϱ weit weniger genau, wenn Δi klein ist; es kann aber auch in diesem Falle ein grösserer Fehler in ϱ zugegeben werden. Nennt man nun die Ablesung für irgend eine beobachtete Richtung r, so ist die Correction derselben

$$\Delta r = \operatorname{tg} \theta \sin (r-\varrho)\, \Delta i$$

Man erkennt hieraus, dass diese Correction bei kleinen Höhen- oder Tiefenwinkeln θ der einzuschneidenden Gegenstände unbedeutend ist, wenn nur Δi klein ist; in gebirgigen Gegenden, wo grössere Werthe von θ vorkommen können, kann sie aber nicht unbedeutend werden, man muss also in solchen Gegenden mehr Fleiss auf die Ausführung des Nivellements des Theodoliten verwenden.

17.

Aus dem vor. Art. ist ersichtlich, dass man, mit Ausnahme der zuletzt erklärten Correction, die Beobachtungen stets so einrichten kann. dass ihre Summen oder ihre Mittel, ohne besondere Rechnungen ausführen zu müssen, frei von den Correctionen des Instruments erhalten werden. Da in den Ausgleichungsrechnungen nur diese Summen gebraucht werden, so ist es für die Ausführung dieser gar nicht nöthig die Correctionen des Instruments in Erfahrung zu bringen, es wäre denn, dass man nach der Ausführung der Beobachtungen erkannt hätte, dass hie und da im Nivellement des Theodoliten zu grosse Fehler vorgekommen wären.

Da im Gegentheil in den Unterschieden der einzelnen Beobachtungen von dem Mittel derselben, oder von einer constanten Zahl, die Correctionen des Theodoliten ihre volle Wirkung äussern, so scheint es, als müsste man für die Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen diese Correctionen kennen, oder als könnte man hiefür die Beobachtungen nur paarweise benutzen. Dass man aber hiebei die Beobachtungen auch einzeln anwenden kann, ohne den Betrag der genannten Correctionen zu kennen, soll jetzt gezeigt werden.

18.

Dass die aus Δi entstehende Correction hiebei nicht in Betracht kommt, wenn auch Δi noch so gross ist, liegt an der Hand. Da man ferner vor dem Beginn der Beobachtungen sich immer bemühen wird

c und c' fast Null zu machen, dieses mit Leichtigkeit und Sicherheit auch geschehen kann, und ein Mal hergestellt, bei einem gut gebauten Theodoliten auch lange Zeit so bleibt, so kann man die durch c und c' entstehenden Fehler in den Unterschieden der einzelnen Beobachtungen von dem Mittel derselben wohl stets als verschwindend betrachten, und es bleibt also blos die etwaige Excentricität des Fernrohrs zu betrachten übrig.

Diese Excentricität hat nicht immer Einfluss auf die genannten Unterschiede, denn nehmen wir an, dass alle eingeschnittenen Gegenstände sich in gleicher Entfernung von der Station befinden und gleiche Höhenwinkel haben, so haben selbstverständlich alle Correctionen wegen Excentricität gleichen Betrag, und üben keine andere Wirkung aus, als dass sie die Correction der Nullpunkte der Gyri ändern. Wenn folglich die eingeschnittenen Gegenstände nahe gleiche Entfernungen und kleine Höhenwinkel haben, so werden sie nur kleine Wirkungen auf die Unterschiede, die hier in Rede stehen haben. Nur wenn die eingeschnittenen Gegenstände sehr ungleiche Entfernungen haben, oder sehr grosse und kleine Höhenwinkel vorkommen, wird der Einfluss der Excentricität auf die Unterschiede wesentlich gross, und darf nicht unberücksichtigt bleiben.

Aber man braucht deshalb nicht die Centrirungen zu berechnen, man braucht nur jede Gruppe von Gyris so in zwei Abtheilungen zu theilen, dass die eine dieser alle Beobachtungen enthält, die in der einen, und die andere Abtheilung alle Beobachtungen, die in der andern Lage des Fernrohrs angestellt worden sind. Hierauf ist nun nichts weiter zu thun, wie jede dieser beiden Abtheilungen für sich dem im Vorhergehenden erklärten Verfahren zu unterwerfen, worauf sich für jede derartige Gruppe von Gyris zwei Werthe von M ergeben, deren jeder denselben Divisor D bekommt. Das partielle Resultat, welches jede so behandelte Gruppe von Gyris für das Quadrat des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen giebt, wird also

$$\frac{m + m'}{2D}$$

zum Ausdruck haben, wenn m und m' die beiden Werthe von M sind, die man auf die eben angezeigte Art berechnet hat.

Das Resultat, welches man durch dieses Verfahren erhält, ist nicht nur frei von der Wirkung der Excentricität des Fernrohrs, sondern auch frei von der Wirkung der von c und c' abhängigen Correctionen der

Beobachtungen, ferner sind sie in dem Falle, dass man die Beobachtungen, wie oben erklärt, angestellt hat, möglichst frei von der Wirkung einer etwa vorgekommenen Drehung des Stativs während der Beobachtungen.

Die Theilungsfehler des Kreises üben freilich jeden Falls, sei es dass man die oben beschriebenen Abtheilungen hat einführen müssen, oder sei es dass dieses nicht nöthig gewesen ist, wenn sie nicht besonders ermittelt und angebracht worden sind, eine Wirkung auf das Resultat aus, aber sie gehören alsdann auch mit zu den Fehlerquellen, die den mittleren Fehler der nackten Beobachtungen bedingen.

19.

Bei der Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen ist es unerlässlich, die einzelnen Beobachtungen zu berücksichtigen, da man, wenn man hiezu Gruppen von Beobachtungen benutzen wollte, auf zu kleine Divisoren, und daher auf wenig sichere Resultate geführt werden würde. Hingegen zur Bestimmung des mittleren Fehlers einer Richtung, welcher sich schliesslich, nach der Ausführung der Ausgleichung des Dreiecksnetzes ergiebt, alle vorhandenen Fehlerquellen in sich schliesst, und zur Ermittelung der mittleren Fehler der Resultate, oder der einzelnen Stücke des Dreiecksnetzes dient; zur Bestimmung dieses mittleren Fehlers kann man sich der Gruppen von Gyris bedienen, aus welchen die strengen Werthe der Unbekannten hervorgehen, wie in der Abhandlung erklärt ist. Bei dieser Bestimmung vereinigen sich alle Beobachtungen, die bei der Ausführung der Triangulation angestellt worden sind, zu einem Ganzen, und der Divisor *D* bekommt daher schon, wenn er aus den Gruppen berechnet wird, und die Ausdehnung der Triangulation nicht zu klein ist, einen ansehnlichen Werth.

Dieses Verfahren ist dem der Bildung von Normalörtern, und der Verwendung dieser zur Bestimmung der Elemente, der Planeten- oder Cometenbahnen, nebst den sich hiebei ergebenden mittleren Fehlern, analog.

20.

Will man sich indessen die vergrösserte Arbeit nicht verdriessen lassen, die hier die Zuziehung der einzelnen Beobachtungen verursacht, so lässt sich weiter nichts dagegen sagen, als dass der Erfolg oftmals dieser Bemühung nicht adäquat ist. Ich will für den Fall, dass der Eine

oder der Andere zur Anwendung dieses Verfahrens geneigt sein möchte, die Aenderungen die es veranlasst, und die sich blos auf die Berechnung der in der Abhandlung mit (ll) bezeichneten Grössen erstrecken, angeben.

Seien für irgend eine Station, und für irgend eine der auf derselben vorkommenden Gruppen von Gyris l, l', l'', etc. $l_{,}$, $l_{,}'$, $l_{,}''$, etc. etc. die Unterschiede der einzelnen Beobachtungen von den vorläufigen Werthen der Richtungen, die im ersten Stationstäfelchen angenommen worden sind, und

$$q = \frac{l + l' + l'' + \dots}{n}$$

$$q_{,} = \frac{l_{,} + l_{,}' + l_{,}'' + \dots}{n}$$

$$q_{,,} = \frac{l_{,,} + l_{,,}' + l_{,,}'' + \dots}{n}$$

wo n die Anzahl der Richtungen bezeichnet, die in der betrachteten Gruppe von Gyris vorkommen, dann wird

$$(ll) = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \quad (l-q)^2 + (l'-q)^2 + (l''-q)^2 + \dots \\ + (l_{,}-q_{,})^2 + (l_{,}'-q_{,})^2 + (l_{,}''-q_{,})^2 + \dots \\ + (l_{,,}-q_{,,})^2 + (l_{,,}'-q_{,,})^2 + (l_{,,}''-q_{,,})^2 + \dots \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf alle Gruppen von Gyris bezieht, die auf der betreffenden Station vorhanden sind. Man kann diesen Ausdruck auf ähnliche Art, wie im Art. 11 bei M geschehen ist, umformen, und erhält dadurch

$$(ll) = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \quad l^2 + l'^2 + l''^2 + \dots \\ + l_{,}^2 + l_{,}'^2 + l_{,}''^2 + \dots \\ + l_{,,}^2 + l_{,,}'^2 + l_{,,}''^2 + \dots \\ + \text{etc.} \end{array} \right\} - \Sigma \left\{ \frac{\left\{ \begin{array}{l} \quad (l + l' + l'' + \dots)^2 \\ + (l_{,} + l_{,}' + l_{,}'' + \dots)^2 \\ + (l_{,,} + l_{,,}' + l_{,,}'' + \dots)^2 \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}}{n} \right\}$$

Man erkennt leicht, dass in den Fällen, in welchen auf der Station nur Eine Gruppe von Gyris vorhanden ist, (ll) sowohl mit M wie mit (ll, n) identisch wird, vorausgesetzt dass man unter den l nicht die Unterschiede der Beobachtungen von beliebigen, als vorläufige Werthe der Richtung angenommenen Zahlen, sondern von den bez. arithmetischen Mitteln versteht, die in diesem Falle die auf der Station ausgeglichenen Werthe der Richtungen sind.

Auf den Stationen, auf welchen zwei oder mehr Gruppen von Gyris vorkommen, finden die eben angeführten Identitäten nicht statt.

21.

Die Fälle, in welchen mit einem Theodoliten beobachtet worden ist, welcher mit einem excentrisch angebrachten Fernrohr versehen ist, erfordern hier eine besondere Betrachtung. Wenn auf der Station nur Eine Gruppe von Gyris vorhanden ist, dann ist leicht einzusehen, dass der Satz des vor. Art. seine volle Geltung behält, vorausgesetzt dass man die oben beschriebenen zwei Abtheilungen bildet, und unter den l die Unterschiede der Beobachtungen von den bez. beiden arithmetischen Mitteln versteht, denn die Werthe der auf der Station ausgeglichenen Richtungen sind in diesem Falle die Mittel aus jenen Mitteln.

Wenn aber auf der Station zwei oder mehr Gruppen von Gyris vorhanden sind, dann haben die arithmetischen Mittel in der Ausgleichungstheorie gar keine Bedeutung mehr, und es muss in diesen Fällen die hier in Rede stehende Untersuchung anders durchgeführt werden. Es müssen nun vor Allem, gleichwie oben, unter den l die Unterschiede der einzelnen Beobachtungen von den vorläufig angenommenen Werthen der Richtungen verstanden werden, aber diese Unterschiede begreifen die Wirkung der Excentricität des Fernrohrs in sich, die nicht zu den Beobachtungsfehlern gezählt werden kann, und daher daraus entfernt werden muss. Hiefür bieten sich zunächst zwei Mittel dar, man kann einestheils, wenn die Entfernungen der eingeschnittenen Gegenstände schon hinreichend genau bekannt sind, für jeden derselben die Wirkung der Excentricität berechnen, und die Beobachtungen davon befreien, anderntheils kann man diese Wirkung schon dadurch entfernen, dass man die Beobachtungen paarweise benutzt, nemlich vor Allem aus je zwei Beobachtungen, die in entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs angestellt worden sind, das arithmetische Mittel nimmt, von diesen Mitteln den vorläufig angenommenen Werth der bez. Richtung abzieht, und die so erhaltenen Unterschiede als die Werthe der l betrachtet.

22.

Es ist ausser diesem noch ein drittes Verfahren möglich, welches die Kenntniss der Entfernungen der eingeschnittenen Gegenstände nicht voraussetzt, und dennoch die directe Benutzung der einzelnen Beobachtungen gestattet. Seien α, α', α'', etc. die einzelnen Beobachtungen irgend einer Richtung in einer Gruppe von Gyris, die in der einen Lage des

Fernrohrs erhalten worden sind, so wie β, β', β'', etc. die Beobachtungen derselben Richtung in derselben Gruppe von Gyris, die man in der anderen Lage des Fernrohrs erhalten hat; sei e die Wirkung der Excentricität des Fernrohrs in Bezug auf diese Richtung. Die von dieser Wirkung befreiten Beobachtungen sind also

$$\alpha + e\,,\quad \alpha' + e\,,\quad \alpha'' + e\,,\quad \text{etc.}$$
$$\beta - e\,,\quad \beta' - e\,,\quad \beta'' - e\,,\quad \text{etc.}$$

und wenn keine Beobachtungsfehler vorhanden wären, so müssten nicht nur

$$\alpha + e = \beta - e$$
$$\alpha' + e = \beta' - e$$
$$\alpha'' + e = \beta'' - e$$
$$\text{etc.}$$

sein, sondern es müsste auch aus allen diesen Gleichungen derselbe Werth von e hervorgehen. Zufolge des allgemeinen Grundsatzes des Art. 1 der Abhandlung wird hiemit, in der Voraussetzung dass allen Beobachtungen gleiche Güte beigelegt wird,

$$e = \frac{\beta + \beta' + \beta'' + \text{etc.} - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \text{etc.}}{n}$$

wenn n die Anzahl der einzelnen Gyri der betreffenden Gruppe bezeichnet. Hiemit kann man die Summen und Unterschiede

$$\alpha + e\,,\quad \alpha' + e\,,\quad \alpha'' + e\,,\quad \text{etc.}$$
$$\beta - e\,,\quad \beta' - e\,,\quad \beta'' - e\,,\quad \text{etc.}$$

berechnen, von welchen um die bez. l zu bilden der vorläufig angenommene Werth der Richtung abzuziehen ist*). Dieses Verfahren ist für jede in der bez. Gruppe beobachtete Richtung besonders auszuführen.

Sind nun alle l dem Vorhergehenden gemäss berechnet worden, dann wird nach einem der beiden Ausdrücke des vorvor. Art. (II) berechnet, und die darauf folgende Berechnung von (II,n) wird ohne Veränderung so ausgeführt, wie in der Abhandlung erklärt worden ist.

*) Man kann bemerken, dass in dem Falle, wo die Gruppe von Gyris nur aus zwei Gyris besteht, hieraus

$$\alpha + e = \beta - e = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

hervor geht, und folglich dieses Verfahren mit dem oben angegebenen zweiten Verfahren identisch wird.

Suppl. 3. Ableitung einer bisher unbekannten Bedingungsgleichung, die im zweiten Theile der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes statt findet.

1.

Der im Art. 72 der Abhandlung bewiesene und durch die Gleichung (64) ausgedrückte Satz, nemlich

$$Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta = 0$$

welcher, nachdem im Art. 76 $\theta = 0$ gesetzt worden, und diese Bestimmung im Verlaufe der Abhandlung beibehalten worden ist, auf

$$Nx + N'x' + N''x'' + \ldots = 0$$

reducirt wird, bezieht sich auf die Ausgleichungen auf den Stationen, indem hier x, x', x'' etc. die Resultate dieser Ausgleichungen bezeichnen. Später, nach Abänderung der anfänglich benutzten Bezeichnungen in andere, die in der Anwendung passender erscheinen, nimmt er die Form

$$Nw(1) + N'w(2) + N''w(3) + \ldots = 0$$

an, und in dieser Form ist er namentlich im § 6 angeführt, und als ein, zur Prüfung der Richtigkeit der Ausführung der numerischen Berechnungen der Ausgleichungen auf den Stationen geeignetes, einfaches Mittel bezeichnet worden, da er für beliebige Werthe der N, N', etc. gilt, und nur seine Wirksamkeit aufhört, wenn man alle N gleich Null macht. In diesem Falle, welcher im zweiten Verfahren vorkommt, ist dieser Satz nemlich stets identisch erfüllt, welche Rechnungsfehler man auch in der Ausgleichung auf den Stationen begangen haben mag.

Ich werde hier weiter gehen, und den Beweis führen, dass dieser Satz auch im zweiten Theile der Auflösung statt findet, das ist, dass auch die Gleichung

$$Nz(1)_{,} + N'z(2)_{,} + N''z(3)_{,} + \ldots = 0$$

statt findet, wodurch für die Prüfung der Richtigkeit der Berechnung der numerischen Werthe der $z(1)_{,}$, $z(2)_{,}$, etc. und, wie man sehen wird, auch der $f(r,I)$, $f(r,II)$, etc. eine neue Controle erlangt wird.

2.

Wenden wir uns zum Art. 35 der Abhandlung und multipliciren die dort befindlichen Ausdrücke für $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, $(\gamma\eta)$, etc., bez. mit N, N', N'', etc. dann erhalten wir

$$(\alpha\eta)N + (\beta\eta)N' + (\gamma\eta)N'' + \ldots = \{(1,1)N + (1,2)N' + (1,3)N'' + \ldots\}q$$
$$+ \{(1,2)N + (2,2)N' + (2,3)N'' + \ldots\}q'$$
$$+ \{(1,3)N + (2,3)N' + (3,3)N'' + \ldots\}q''$$
$$+ \text{etc.}$$

Aber im Art. 71 haben die mit (1,1), (1,2), etc. etc. bezeichneten Grössen dieselbe Bedeutung wie im Art. 35, und folglich geht die vorstehende Gleichung durch Hülfe der (63) in die folgende über,

$$(\alpha\eta)N + (\beta\eta)N' + (\gamma\eta)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}(q + q' + q'' + \ldots$$

Eben so bekommt man

$$(\alpha\varkappa)N + (\beta\varkappa)N' + (\gamma\varkappa)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}(r + r' + r'' + \ldots$$
$$(\alpha\lambda)N + (\beta\lambda)N' + (\gamma\lambda)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}(s + s' + s'' + \ldots$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

wo zufolge der (30) q, q', q'', etc. r, r', r'', etc. s, s', s'', etc. etc. die Coefficienten der Unbekannten in den verschiedenen Bedingungsgleichungen sind.

Gehen wir nun speciel zur geodätischen Aufgabe über, und bemerken, dass in dieser die Bedingungsgleichungen blos Winkel, oder Unterschiede von paarweise genommenen Richtungen enthalten, so folgt dass in dieser Aufgabe nicht blos im Allgemeinen, sondern für jede Station ins Besondere

$$0 = q + q' + q'' + \ldots$$
$$0 = r + r' + r'' + \ldots$$
$$0 = s + s' + s'' + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

sind. Die oben erhaltenen Gleichungen gehen daher über in

$$0 = (\alpha\eta)N + (\beta\eta)N' + (\gamma\eta)N'' + \ldots$$
$$0 = (\alpha\varkappa)N + (\beta\varkappa)N' + (\gamma\varkappa)N'' + \ldots$$
$$0 = (\alpha\lambda)N + (\beta\lambda)N' + (\gamma\lambda)N'' + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

Da nun zufolge des Art. 49

$$z = (\alpha\eta)\alpha_{,} + (\alpha\varkappa)\beta_{,} + (\alpha\lambda)\gamma_{,} + \ldots$$
$$z' = (\beta\eta)\alpha_{,} + (\beta\varkappa)\beta_{,} + (\beta\lambda)\gamma_{,} + \ldots$$
$$z'' = (\gamma\eta)\alpha_{,} + (\gamma\varkappa)\beta_{,} + (\gamma\lambda)\gamma_{,} + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

und dort z, z', z'', etc. dieselbe Bedeutung haben, wie später $z(1)_s$, $z(2)_s$, $z(3)_s$, etc., so bekommt man sogleich

$$0 = Nz(1)_s + N'z(2)_s + N''z(3)_s + \dots$$

für jede Station besonders. W. z. b. w

3.

Um diesen Satz auf ein Beispiel anzuwenden nehme ich die Station (1) des Hauptbeispiels vor. Im Art. 96 wurde gefunden

$$z(1)_1 = +\,0''.107\ ,\ z(2)_1 = +\,0''.073\ ,\ z(3)_1 = -\,0''.440$$
$$z(4)_1 = +\,0.459\ \ ,\ z(a)_1 = -\,0.038\ ,\ z(b)_1 = -\,0.068\ .$$

und im Art. 84 für dieselbe Station

$$N = 1.5\ ,\ N' = 3.0\ ,\ N'' = 0.5\ ,$$
$$N''' = 0\ \ ,\ N^{IV} = 2.5\ ,\ N^{V} = 0.9444$$

Die Rechnung giebt daher

$$\begin{array}{llllll} z(1)_1 = (9.0294)\ , & z(2)_1 = (8.8633)\ , & z(3)_1 = (9.6435n) \\ N \ \ = (0.1769)\ , & N' \ = (0.4771)\ , & N'' \ = (9.6990\ )\ . \\ \hline \quad 9.2063 & \quad 9.3404 & \quad 9.3425n \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} z(4)_1 = (\qquad)\ , & z(a)_1 = (8.5798n)\ , & z(b)_1 = (8.8325n) \\ N''' = (-\,\infty)\ , & N^{IV} = (0.3979\ )\ , & N^{V} = (9.9752\ ) \\ \hline & \quad 8.9777n & \quad 8.8077n \end{array}$$

und die Producte sind folglich

$$\begin{array}{rr} & +\,0''.161 \\ & +\,0.219 \\ & -\,0.220 \\ & 0 \\ & -\,0.095 \\ & -\,0.064 \\ \hline \text{Sa.} = & +\,0.001 \end{array}$$

welches für Null zu erachten ist.

Im Art. 78 wurde bewiesen, dass für jede Station, auf welcher in jedem Gyrus alle vorhandenen Richtungen eingeschnitten worden sind, die Gleichung

$$N = N' = N'' = \text{etc.}$$

statt findet, und für jede solche Station wird also der oben bewiesene Satz

$$0 = z(1)_s + z(2)_s + z(3)_s + \dots$$

Das Beispiel der Abhandlung bietet keinen solchen Fall dar, aber in der Gaussischen Abhandlung «Supplementum theoriae combinationis etc.» findet er auf allen im dortigen, aus der hannöverschen Gradmessung entlehnten, Beispiel vorkommenden Stationen statt. Da die dortige Bezeichnung (0), (1), (2), (3); (4), (5) (6); etc. mit der hier eingeführten $z(1)_1$, $z(2)_1$, $z(3)_1$, $z(4)_1$; $z(1)_2$, $z(2)_2$, $z(3)_2$; etc. identisch ist, so findet man im Art. 24 der angezogenen Abhandlung.

$z(1)_1 = +\ 0''.065$,		$z(1)_3 = -\ 0''.481$
$z(2)_1 = -\ 0.212$,	$z(1)_2 = +\ 0''.233$,	$z(2)_3 = +\ 0.406$
$z(3)_1 = +\ 0.339$,	$z(2)_2 = -\ 0.071$,	$z(3)_3 = +\ 0.021$
$z(4)_1 = -\ 0.193$,	$z(3)_2 = -\ 0.162$,	$z(4)_3 = +\ 0.054$
Sa. $= -\ 0.001$,	Sa. $=\ 0.000$.	Sa. $=\ 0.000$

u. s. w. mit dem obigen Satze übereinstimmend. Da Gauss dieses Satzes gar nicht erwähnt, so muss man schliessen, dass er ihm entgangen ist.

4.

Als Corollarium zum oben bewiesenen Satze kann noch das Folgende bemerkt werden. Da statt der oben angewandten Bezeichnungen

$$(\alpha\eta)\ ,\ (\beta\eta)\ ,\ (\gamma\eta)\ ,\ \text{etc.}$$
$$(\alpha\varkappa)\ ,\ (\beta\varkappa)\ ,\ (\gamma\varkappa)\ ,\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

im Verlaufe der Abhandlung die folgenden eingeführt worden sind.

$$f(1,I)_s\ ,\ f(2,I)_s\ ,\ f(3,I)_s\ ,\ \text{etc.}$$
$$f(1,II)_s,\ f(2,II)_s,\ f(3,II)_s,\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

so giebt der vorvor. Art. auch die Relationen

$$0 = N.f(1.I)_s + N'.f(2,I)_s + N''.f(3,I)_s + \dots$$
$$0 = N.f(1.II)_s + N'.f(2,II)_s + N''.f(3,II)_s + \dots$$
$$0 = N.f(1,III)_s + N'.f(2,III)_s + N''.f(3,III)_s + \dots$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

die für jede Station besonders statt finden, und auch zur Prüfung der Richtigkeit der numerischen Rechnungen, so wie zur leichteren Auffindung etwaiger Fehler in denselben dienen können.

Ich bemerke noch, dass alle hier entwickelten Relationen wegfällig werden, wenn man sich des in der Abhandlung entwickelten zweiten Verfahrens bedient.

Suppl. 4. Von der Behandlung etwa vorhandener, überzähligen Richtungen.

1.

Im Art. 79 der Abhandlung habe ich in Bezug auf etwa vorhandene überzählige Richtungen angegeben diesen in der Reihenfolge der Richtungen der betreffenden Station die letzten Stellen zuzutheilen, indem sie darauf im zweiten Theile der Auflösung so wenig wie möglich eintreten. Hier werde ich zeigen, wie man bewirken kann, dass sie im zweiten Theile der Auflösung gar nicht erscheinen, und dabei alle übrigen Vortheile, die das erste Verfahren darbietet, vollständig bewahrt bleiben. Ich werde zuerst den Fall Einer überzähligen Richtung, und darauf den, in welchem zwei solcher auf irgend einer Station vorhanden sind, betrachten; aus den hiedurch sich ergebenden Formeln kann man leicht erkennen, wie in Fällen, wo drei oder mehr überzählige Richtungen vorhanden sind, zu verfahren ist.

2.

Die erste jetzt zu beachtende Regel ist die, dass man alle vorhandenen überzähligen Richtungen aus der natürlichen Reihenfolge der überhaupt auf der Station vorhandenen Richtungen herausheben, und den Richtungen nach den Dreieckspunkten voran stellen muss.

Sei nun Eine überzählige Richtung vorhanden, so stelle ich die Aufgabe zu bewirken, dass nicht wie im Art. 76 die Coefficienten

$$(ab),\ (ac),\ (ad),\ \text{etc. nebst } (bc)$$

der Gleichungen (61) des Art. 69, sondern statt dieser die Coefficienten

$$(bc.1),\ (bd.1),\ (be.1),\ \text{etc. nebst } (cd.1)$$

Null werden.

3.

Wenden wir uns zu den Ausdrücken des Art. 43, so finden wir, dass die oben aufgestellten Bedingungen zunächst auf die folgenden Gleichungen führen,

$$\left.\begin{array}{l} (bc.1) = 0 = (bc) + (ac)\alpha' \\ (bd.1) = 0 = (bd) + (cd)\alpha' \\ (be.1) = 0 = (be) + (ae)\alpha' \\ \quad\text{etc.} \\ (cd.1) = 0 = (cd) + (ad)\beta' \end{array}\right\} (A)$$

in welchen

$$\left.\begin{array}{l} (ab) + (aa)\alpha' = 0 \\ (ac) + (aa)\beta' = 0 \end{array}\right\} (B)$$

sind; auf der Auflösung dieser Gleichungen beruht die Auflösung unserer Aufgabe, als deren Unbekannte die im Art. 69 eingeführten, und mit N, N', N'', etc. bezeichneten Grössen zu betrachten sind.

4.

Es wären nun zunächst aus den Gleichungen des vor. Art. α' und β' zu eliminiren, und in die daraus hervorgehenden Gleichungen die allgemeinen Ausdrücke der (aa), (ab), etc. etc., die auch im Art. 69 gegeben sind, zu substituiren. Diese Gleichungen würden hierauf zu Functionen der N, N', N'', etc. werden, deren Ausdrücke hierauf durch wechselseitige Eliminationen zu entwickeln wären. Diese Behandlung dieser Gleichungen führt indess auf Ausdrücke für die genannten Unbekannten, die so verwickelt sind, dass sie sich zur Anwendung nicht eignen. Man muss daher ein anderes Verfahren anwenden, und dieses kann man auf den Umstand stützen, dass nicht alle N aus diesen Gleichungen bestimmt werden können, sondern eine dieser Grössen willkührlich bleibt. Man hat a. a. O. gesehen, dass die Anzahl der N der Anzahl aller auf der Station überhaupt eingeschnittenen Richtungen gleich ist, findet dagegen aber leicht, dass die Anzahl der Bedingungen, die im vorvor. Art. eingeführt wurden, um Eins kleiner ist, wie diese Richtungen, und hieraus folgt, dass Eine der Grössen N, N', N'', etc. willkührlich bleibt. Wenn man diesen Umstand zweckmässig benutzt, so ergiebt sich eine sehr einfache Auflösung unserer Aufgabe.

5.

Sei von nun an

$$N = 0$$

und in Folge dessen

$$(aa) = Q - (pp)\,,\quad (bb)' = Q' - (p'p')$$
$$(ab) = - (pp')\,,\quad (bc)' = - (p'p'')$$
$$(ac) = - (pp'')\,,\quad (bd)' = - (p'p''')$$
$$(ad) = - (pp''')\,,\quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$
$$(al) = (lx)\,.\quad (bl) = (lx')$$
$$(cc)' = Q'' - (p''p'')\,,\quad (dd)' = Q''' - (p'''p''')$$
$$(cd)' = - (p''p''')\,,\quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.}\quad (dl) = (lx''')$$
$$(cl) = (lx'')\quad \text{etc.}$$

worauf

$$(bb) = (bb)' + N'^2\,,\quad (cc) = (cc)' + N''^2$$
$$(bc) = (bc)' + N'N''\,.\quad (cd) = (cd)' + N''N'''$$
$$(bd) = (bd)' + N'N'''\,.\quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.}\quad (dd) = (dd)' + N'''^2$$
$$\text{etc.}$$

etc. werden, während der Ausdruck für (ll) unverändert bleibt. Setzt man nun diese letzteren Ausdrücke in die Gleichungen (A), so erhält man

$$N'N'' = -(bc)' - (ac)\alpha' = -(bc,1)'$$
$$N'N''' = -(bd)' - (ad)\alpha' = -(bd,1)'$$
$$N'N^{IV} = -(be)' - (ae)\alpha' = -(be,1)'$$
$$\text{etc.}$$
$$N''N''' = -(cd)' - (ad)\beta' = -(cd,1)'$$

wenn

$$(bc,1)' = (bc)' + (ac)\alpha'$$
$$(bd,1)' = (bd)' + (ad)\alpha'$$
$$(be,1)' = (be)' + (ae)\alpha'$$
$$\text{etc.}$$
$$(cd,1)' = (cd)' + (ad)\beta'$$
$$(ce,1)' = (ce)' + (ae)\beta'$$
$$\text{etc.}$$
$$(de,1)' = (de)' + (ae)\gamma'$$
$$\text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

gesetzt wird. Bestimmt man nun die N', N'', etc. so dass

$$N' = \sqrt{-\frac{(bc,1)'\,(bd,1)'}{(cd,1)'}} \qquad N'''' = -\frac{(be,1)'}{N'}$$

$$N'' = \sqrt{-\frac{(bc,1)'\,(cd,1)'}{(bd,1)'}} \qquad \text{etc.}$$

$$N''' = \sqrt{-\frac{(bd,1)'\,(cd,1)'}{(bc,1)'}}$$

werden, so erhalt man sogleich

$$(bb,1) = (bb,1)' + N'^2$$
$$(bc,1) = 0$$
$$(bd,1) = 0$$
$$(be,1) = 0$$
$$\text{etc.}$$
$$(cc,1) = (cc,1)' + N''^2$$
$$(cd,1) = 0$$
$$(ce,1) = (ce,1)' + N''N''''$$
$$\text{etc.}$$
$$(dd,1) = (dd,1)' + N'''^2$$
$$(de,1) = (de,1)' + N'''N''''$$
$$\text{etc.}$$
$$(ee,1) = (ee,1)' + N''''^2$$
$$\text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

wo die $(bb,1)'$, $(cc,1)'$, etc. eben so zu berechnen sind, wie die übrigen, ähnlich bezeichneten, Grössen, und die Berechnung der $(bl,1)$, $(cl,1)$, etc. unverändert so ausgeführt wird, wie im § 4 der Abhandlung angegeben ist. Hiemit ist die Aufgabe schon vollständig gelöst, und vorausgesetzt, dass man den wahrscheinlichsten Werth der überzähligen Richtung nicht kennen zu lernen braucht, wird der weitere Verlauf der Auflösung genau so durchgeführt, wie im § 6 bei dem «ersten Verfahren» gezeigt worden ist. In dem Falle, dass man auch den wahrscheinlichsten Werth der überzähligen Richtung kennen lernen will, kommt eine kleine Rechnung hinzu, die weiter unten erklärt werden wird.

6.

Dass im ersten Theile der Auflösung die überzählige Richtung nicht weiter eintritt, ist an sich klar, aber dass sie im zweiten Theile der Auflösung gar nicht eintritt, muss besonders gezeigt werden. Da in Folge der Coefficienten, die oben gleich Null gemacht worden sind, auch

$$\beta'' = \gamma'' = \delta'' = \text{etc.} = \gamma''' = 0$$

werden, so nehmen die allgemeinen Ausdrucke der $\eta(r,I)_s$, $\eta(r,II)_s$, etc. die folgende Form an

$$\begin{aligned}
\eta(a,I)_s &= \qquad q(a,I)_s \\
\eta(b,I)_s &= \alpha'.q(a,I)_s + q(b,I)_s \\
\eta(c,I)_s &= \alpha''.q(a,I)_s + q(c,I)_s \\
\eta(d,I)_s &= \alpha'''.q(a,I)_s + q(d,I)_s \\
\eta(e,I)_s &= \alpha''''.q(a,I)_s + \gamma''.q(c,I)_s + \delta''.q(d,I)_s + q(e,I) \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

die durch Vertauschung der I mit der II, III. etc. nach und nach auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind. Da aber die Richtung a eine uberzählige ist, die mit dem Dreiecksnetze in keiner Verbindung steht, so sind immer die Differentialquotienten

$$q(a,I)_s = q(a,II)_s = q(a,III)_s = \text{etc.} = 0$$

und streicht man demzufolge die betreffenden Glieder aus den vorstehenden Ausdrücken weg, so werden erstlich

$$\eta(a,I)_s = \eta(a,II)_s = \eta(a,III)_s = \text{etc.} = 0$$

und aus den übrigen Grössen dieser Gattung verschwindet Alles, was von der überzähligen Richtung abhängt, indem γ''. δ'', etc. etc. von den α', α'', α''', etc. unabhängig sind. Da somit die $\eta(r,I)_s$. $\eta(r,II)_s$. etc. von der uberzähligen Richtung unabhängig sind, so sind die $f(r,I)_s$. $f(r,II)_s$, etc. und die Coefficienten der Endgleichungen es auch, und der ganze zweite Theil der Auflösung ist demnach von der überzähligen Richtung unabhängig. W. z. b. w.

7.

Zur leichteren Uebersicht sollen jetzt die im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke in die im § 6 der Abhandlung angewandte Bezeichnung übersetzt, und ausführlich angeführt werden. Die überzählige Richtung werde ich mit a bezeichnen, während wie a. a. O. die übrigen Richtungen mit den fortlaufenden Zahlen 1, 2, 3, etc. bezeichnet werden. Die Hülfsgrössen α', β', γ'. etc., die von der überzähligen Richtung abhängen, sollen um sie von den übrigen ähnlichen zu unterscheiden mit a', b', c', etc. bezeichnet. und hierauf mit α'. β'. etc. β''. γ'', etc. γ'''. δ''', etc etc. fortgefahren werden. Da endlich $N = 0$ ist. so werde ich auch N statt N', N' statt N'', etc. schreiben. Es sind nun erst zu berechnen

$$(aa) = Q - (pp), \quad (bb) = Q' - (p'p')$$
$$(ab) = - (pp'), \quad (bc) = - (p'p'')$$
$$(ac) = - (pp''), \quad (bd) = - (p'p''')$$
$$(ad) = - (pp'''), \quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \quad (bl) = (lx')$$
$$(al) = (lx),$$

$$(cc) = Q'' - (p''p''), \quad (dd) = Q''' - (p'''p''')$$
$$(cd) = - (p''p'''), \quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \quad (dl) = (lx''')$$
$$(cl) = (lx''),$$

u. s. w. so wie (ll) wie vorher zu berechnen. Hieraufrechne man

$$a' = -\frac{(ab)}{(aa)}, \; b' = -\frac{(ac)}{(aa)}, \; c' = -\frac{(ad)}{(aa)}, \text{ etc. } \chi^{(a)} = -\frac{(al)}{(aa)}$$

$$(bb,1) = (bb) + (ab)a'$$
$$(bc,1) = (bc) + (ac)a'$$
$$(bd,1) = (bd) + (ad)a'$$
$$\text{etc.}$$
$$(bl,1) = (bl) + (al)a'$$

$$(cc,1) = (cc) + (ac)b'$$
$$(cd,1) = (cd) + (ad)b'$$
$$\text{etc.}$$
$$(cl,1) = (cl) + (al)b'$$

$$(dd,1) = (dd) + (ad)c'$$
$$\text{etc.}$$
$$(dl,1) = (dl) + (al)c'$$
$$\text{etc. bis}$$
$$(ll,a) = (ll) + (al)\chi^{(a)}$$

Man sieht, dass diese Ausdrücke die erste Abtheilung der bekannten Auflösung der Gleichungen bilden, auf die die Methode der kleinsten Quadrate immer hinführt. Hierauf ist zu berechnen

$$M = \sqrt{-(bc,1)\,(bd,1)\,(cd,1)}$$
$$N = -\frac{M}{(cd,1)} \qquad N''' = -\frac{(be,1)}{N}$$
$$N'' = -\frac{M}{(bd,1)} \qquad N'''' = -\frac{(bf,1)}{N}$$
$$N' = -\frac{M}{(bc,1)} \qquad \text{etc.}$$

worauf sich die folgenden Ausdrucke ergeben,

$$(1,1) = (bb,1) + N^2\,, \quad (2,2,1) = (cc,1) + N'^2$$
$$(1,2) = 0 \quad (2,3,1) = 0$$
$$(1,3) = 0 \quad (2,4,1) = (ce,1) + N'N'''$$
$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$
$$(1,l) = (bl,1) \quad . \quad (2,l,1) = (cl,1)$$

$$(3,3,2) = (dd,1) + N''^2 \quad . \quad (4,4,1) = (ee,1) + N'''^2$$
$$(3,4,2) = (de,1) + N''N'''\,, \quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \quad (4,l,1) = (el,1)$$
$$(3,l,2) = (dl,1) \quad .$$

u. s. w. wenn mehr Richtungen vorhanden sind. Mit diesen Coefficienten wird nun die fernere Rechnung bis an das Ende derselben genau so ausgefuhrt wie im § 6 bei dem ersten Verfahren beschrieben worden ist. In Bezug auf die Bezeichnung ist die einzige Bemerkung zu machen, dass man statt des a. a. O. vorkommenden Ausdrucks

$$(ll,1) = (ll) + (1,l)\chi'$$

jetzt

$$(ll,1) = (ll,a) + (1,l)\chi'$$

schreiben muss.

8.

Wenn man auch den wahrscheinlichsten Werth der uberzahligen Richtung kennen lernen will, so dienen dazu die folgenden Ausdrucke. Man rechne zuerst

$$a' = a'$$
$$a'' = b'$$
$$a''' = c'$$
$$a^{iv} = d' + \gamma''a'' + \gamma'''a'''$$
$$a^{v} = e' + \delta''a'' + \delta'''a''' + \delta^{iv}a^{iv}$$
$$\text{etc.}$$

worauf man

$$-\,w(a) = \chi^{(a)} + \chi'a' + \chi''a'' + \chi'''a''' + \chi^{iv}a^{iv} + \chi^{v}a^{v} + \ldots$$

erhält. Setzt man ferner

$$f(a,I)_s = a'Q(1,I)_s + a''Q(2,I)_s + a'''Q(3,I)_s + a^{iv}Q(4,I)_s + \ldots$$

und demgemäss für alle ubrigen vorhandenen Bedingungsgleichungen, so ergiebt sich

$$z(a) = f(a,I)_s(I) + f(a,II)_s(II) + f(a,III)_s(III) + \ldots$$

wo wieder (I), (II), (III), etc. die Werthe der Unbekannten der Endgleichungen bezeichnen. Nennt man endlich wieder (a) den vorläufigen Werth, den man im ersten Anfange der Rechnung für die überzählige Richtung angenommen hat, so wird der wahrscheinlichste Werth derselben

$$x(a) = (a) + w(a) - z(a)$$

9.

Nehmen wir nun an, dass auf irgend einer Station zwei überzählige Richtungen eingeschnitten worden sind, so folgt die Auflösung dieser Aufgabe so einfach aus der vorhergehenden, sich auf Eine solche Richtung beziehenden, dass sie ohne Weiteres hingeschrieben werden kann. Man setze zuerst die beiden überzähligen Richtungen allen andern voran, und mache wie in der vorhergehenden Aufgabe

$$\begin{array}{ll}
(aa) = Q - (pp)\,, & (bb) = Q' - (p'p') \\
(ab) = \quad - (pp')\,, & (bc) = \quad - (p'p'') \\
(ac) = \quad - (pp'')\,, & (bd) = \quad - (p'p''') \\
(ad) = \quad - (pp''')\,, & \quad \text{etc.} \\
\quad \text{etc.} & \\
(al) = (lx) \quad , & (bl) = (lx') \\
\hline
(cc) = Q'' - (p''p'')\,, & (dd) = Q''' - (p'''p''') \\
(cd) = \quad - (p''p''')\,, & \quad \text{etc.} \\
\quad \text{etc.} & \\
(cl) = (lx'') \quad , & (dl) = (lx''') \\
\hline
\end{array}$$

u. s. w. und rechne auch (ll) wie immer. Hierauf berechne man die zwei ersten Abtheilungen der bekannten Auflösung, nemlich

$$a' = -\frac{(ab)}{(aa)},\ b' = -\frac{(ac)}{(aa)},\ c' = -\frac{(ad)}{(aa)},\ \text{etc.}\ \chi^{(a)} = -\frac{(al)}{(aa)}$$

$$\begin{array}{c}
\hline
(bb,1) = (bb) + (ab)a' \\
(bc,1) = (bc) + (ac)a' \\
(bd,1) = (bd) + (ad)a' \\
\text{etc.} \\
(bl.1) = (bl) + (al)a' \\
\hline
(cc,1) = (cc) + (ac)b'
\end{array}$$

$$(cd,1) = (cd) + (ad)b'$$

etc.

$$(cl,1) = (cl) + (al)b'$$

$$(dd,1) = (dd) + (ad)c'$$

etc.

$$(dl,1) = (dl) + (al)c'$$

etc. bis

$$(ll,a) = (ll) + (al)\chi^{(a)}$$

$$b'' = -\frac{(bc,1)}{(bb,1)},\quad c'' = -\frac{(bd,1)}{(bb,1)}, \text{ etc. } \chi^{(b)} = -\frac{(bl,1)}{(bb,1)}$$

$$(cc,2) = (cc,1) + (bc,1)b''$$

$$(cd,2) = (cd,1) + (bd,1)b''$$

etc.

$$(cl,2) = (cl,1) + (bl,1)b''$$

$$(dd,2) = (dd,1) + (bd,1)c''$$

etc.

$$(dl,2) = (dl,1) + (bl,1)c''$$

etc. bis

$$(ll,b) = (ll,a) + (bl,1)\chi^{(b)}$$

Hierauf werden

$$M = V' - (cd,2)(ce,2)(de,2)$$

$$N = -\frac{M}{(de,2)} \qquad N''' = -\frac{(cf,2)}{N}$$

$$N'' = -\frac{M}{(ce,2)} \qquad N^{IV} = -\frac{(cg,2)}{N}$$

$$N' = -\frac{M}{(cd,2)} \qquad \text{etc.}$$

berechnet, worauf man

$$(1,1) = (cc,2) + N^2, \qquad (2,2,1) = (dd,2) + N'^2$$

$$(2,4,1) = (df,2) + N'N$$

$$(2,5,1) = (dg,2) + N'N''$$

etc.

$$(1,l) = (cl,1) \qquad (2,l,1) = (dl,2)$$

$$(3,3,2) = (ee,2) + N''^2, \qquad (4,4,1) = (ff,2) + N'^2$$

$$(3,4,2) = (ef,2) + N'N''', \qquad (4,5,1) = (fg,2) + N'N'$$

$$(3,5,2) = (eg,2) + N''N'', \qquad \text{etc.}$$

$$\text{etc.} \qquad (4,l,1) = (fl,2)$$

$$(3,l,2) = (el,2) \qquad (5,5,1) = (gg,2) + N'^2$$

etc.

$$(5,l,1) = (gl,2)$$

u. s. w. erhält. Mit diesen Coefficienten ist wieder die fernere Rechnung bis an das Ende derselben genau so auszuführen, wie im § 6 der Abhandlung bei dem ersten Verfahren beschrieben worden ist. Nur muss wieder statt des dort befindlichen Ausdrucks

$$(II,1) = (II) + (1.I)\chi'$$

jetzt

$$(II.1) = (II,b) + (1,I)\chi'$$

geschrieben werden.

10.

Wenn auch die wahrscheinlichsten Werthe der beiden überzähligen Richtungen zur Kenntniss gebracht werden sollen, so sind im gegenwärtigen Falle die folgenden Ausdrücke anzuwenden. Zuerst

$$\begin{aligned}
a^{I} &= a^{I} \\
a^{II} &= b^{I} + b^{II}a^{I} \\
b^{II} &= b^{II} \\
a^{III} &= c^{I} + c^{II}a^{I} \\
b^{III} &= c^{II} \\
a^{IV} &= d^{I} + d^{II}a^{I} \\
b^{IV} &= d^{II} \\
a^{V} &= e^{I} + e^{II}a^{I} + \gamma^{II}a^{III} + \gamma^{III}a^{IV} \\
b^{V} &= e^{II} + \gamma^{II}b^{III} + \gamma^{III}b^{IV} \\
a^{VI} &= f^{I} + f^{II}a^{I} + \delta^{II}a^{III} + \delta^{III}a^{IV} + \delta^{V}a^{V} \\
b^{VI} &= f^{II} + \delta^{II}b^{III} + \delta^{III}b^{IV} + \delta^{V}b^{V}
\end{aligned}$$

etc.

woraus

$$\begin{aligned}
-w(a) &= \chi^{(a)}a^{I} + \chi^{(b)}a^{I} + \chi^{I}a^{II} + \chi^{II}a^{III} + \chi^{III}a^{IV} + \chi^{IV}a^{V} + \chi^{V}a^{VI} + \ldots \\
-w(b) &= \chi^{(b)} + \chi^{I}b^{II} + \chi^{II}b^{III} + \chi^{III}b^{IV} + \chi^{IV}b^{V} + \chi^{V}b^{VI} + \ldots
\end{aligned}$$

hervorgehen. Ferner

$$\begin{aligned}
f(a,I)_s &= a^{II}Q(1,I)_s + a^{III}Q(2,I)_s + a^{IV}Q(3,I)_s + a^{V}Q(4,I)_s + a^{VI}Q(5,I)_s + \ldots \\
f(b,I)_s &= b^{II}Q(1,I)_s + b^{III}Q(2,I)_s + b^{IV}Q(3,I)_s + b^{V}Q(4,I)_s + b^{VI}Q(5,I)_s + \ldots
\end{aligned}$$

und demgemäss für alle übrigen Bedingungsgleichungen. Endlich

$$\begin{aligned}
z(a) &= f(a,I)_s(I) + f(a,II)_s(II) + f(a,III)_s(III) + \ldots \\
z(b) &= f(b,I)_s(I) + f(b,II)_s(II) + f(b.III)_s(III) + \ldots
\end{aligned}$$

nebst den wahrscheinlichsten Werthen

$$\begin{aligned}
x(a) &= (a) + w(a) - z(a) \\
x(b) &= (b) + w(b) - z(b)
\end{aligned}$$

wenn wieder (a) und (b) die beim ersten Anfang der Rechnungen diesen Richtungen beigelegten vorläufigen Werthe bedeuten.

11.

Die Fälle, in welchen auf einer Station drei oder mehr überzählige Richtungen eingeschnitten worden sind, brauchen nun nicht weiter erörtert zu werden, da das in denselben einzuhaltende Verfahren sehr leicht aus den zwei behandelten Fällen sich ergiebt. Höchstens kann die Ausdehnung der Berechnung der a'', b'', etc. auf drei oder mehr Richtungen eine kleine Schwierigkeit verursachen, und ich will daher diese Ausdrücke auf drei Richtungen ausgedehnt hier zum Ueberfluss anführen.

$$\begin{array}{l}
a' = a' \\
\hline
a'' = b' + b''a' \\
b'' = b'' \\
\hline
a''' = c' + c''a' + c'''a'' \\
b''' = c'' + c'''b'' \\
c''' = c''' \\
\hline
a^{IV} = d' + d''a' + d'''a'' \\
b^{IV} = d'' + d'''b'' \\
c^{IV} = d''' \\
\hline
a^{V} = e' + c''a' + e'''a'' \\
b^{V} = e'' + e'''b'' \\
c^{V} = e''' \\
\hline
a^{VI} = f' + f''a' + f'''a'' + \gamma''a^{IV} + \gamma'''a^{V} \\
b^{VI} = f'' + f'''b'' + \gamma''b^{IV} + \gamma'''b^{V} \\
c^{VI} = f''' + \gamma''c^{IV} + \gamma'''c^{V} \\
\hline
a^{VII} = g' + g''a' + g'''a'' + \delta''a^{IV} + \delta'''a^{V} + \delta^{IV}a^{VI} \\
b^{VII} = g'' + g'''b'' + \delta''b^{IV} + \delta'''b^{V} + \delta^{IV}b^{VI} \\
c^{VII} = g''' + \delta''c^{IV} + \delta'''c^{V} + \delta^{IV}c^{VI} \\
\hline
\end{array}$$

etc.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit denen, die oben für zwei und eine überzähligen Richtungen gegeben worden sind, so findet man leicht die Ausdrücke für vier und mehr dieser Richtungen.

12.

Um die vorhergehenden Entwickelungen durch ein Beispiel zu erläutern, soll die erste Station des Hauptbeispiels der Abhandlung dienen,

auf welcher zwei überzählige Richtungen vorkommen. Setzt man diese jetzt voran, so steht das Täfelchen für die (pp), (pp'), etc. wie folgt

$r =$	(a)	(b)	(1)	(2)	(3)	(4)
	p	p'	p''	p'''	p^{iv}	p^{v}
p	20.4167	12.0833	3.75	2.6667	7.75	5.3333
p'		20.75	1.4167	1.3333	9.9167	5.5
p''			6.5833	4.5	0.75	0
p'''				6.0	1.5	0
p^{iv}					14.0833	2.0
p^{v}						10.1667
Q	52	51	17	16	36	23
(lr)	$+15''.983$	$-22''.704$	$-9''.220$	$+13''.523$	$+6''.742$	$-4''.323$

Hiemit bekommt man zuerst

$(aa) = 31.5833$
$(ab) = -12.0833$, $(bb) = 30.25$
$(ac) = -3.75$, $(bc) = -1.4167$, $(cc) = 10.4167$
$(ad) = -2.6667$, $(bd) = -1.3333$, $(cd) = -4.5$
$(ae) = -7.75$, $(be) = -9.9167$, $(ce) = -0.75$
$(af) = -5.3333$, $(bf) = -5.5$, $(cf) = 0$
$(al) = +15''.983$, $(bl) = -22''.704$, $(cl) = -9''.220$
$(dd) = 10.0$
$(de) = -1.5$, $(ee) = 21.9167$
$(df) = 0$, $(ef) = -2.0$, $(ff) = 12.8333$
$(dl) = +13''.523$, $(el) = +6''.742$, $(fl) = -4''.323$

und wie in der Abhandlung

$$(ll) = 174.367$$

Die Ausdrücke des Art. 9 geben nun hiemit

$$a' = (9.58273),\ b' = (9.07459),\ c' = (8.92651)$$
$$d' = (9.38984),\ e' = (9.22754),\ \chi^{(a)} = -(9.70420)$$

wo, wie immer, die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen sind. Ferner

$(bb,1) = 25.6270$
$(bc,1) = -2.8514$, $(cc,1) = 9.9714$,
$(bd,1) = -2.3535$, $(cd,1) = -4.8166$, $(dd,1) = 9.7748$
$(be,1) = -12.8818$, $(ce,1) = -1.6702$, $(de,1) = -2.1544$
$(bf,1) = -7.5405$, $(cf,1) = -0.6333$, $(df,1) = -0.4503$
$(bl,1) = -16''.5891$, $(cl,1) = -7''.3222$, $(dl,1) = +14''.8725$

$(ee,1) = \quad 20.0150$
$(ef,1) = -\ 3.3087\ ,\ (ff,1) = \quad 11.9327$
$(el,1) = +\ 10''.6639,\ (fl,1) = -\ 1''.6240\ ,\ (ll,a) = 166.279$

$b'' = (9.04636)\ ,\ c'' = (8.96301)\ .\ d'' = (9.70129)$
$e'' = (9.46870)\ .\ \chi^{(b)} = (9.81112)$

$(cc,2) = \quad 9.6541$
$(cd,2) = -\ 5.0785\ ,\ (dd,2) = \quad 9.5587$
$(ce,2) = -\ 3.1035\ ,\ (de,2) = -\ 3.3374\ .\ (ee,2) = \quad 13.5397$
$(cf,2) = -\ 1.4723\ ,\ (df,2) = -\ 1.1428\ ,\ (ef,2) = -\ 7.0990$
$(cl,2) = -\ 9''.1679,\ (dl,2) = +\ 13''.3491\ .\ (el,2) = +\ 2''.3253$
$(ff,2) = \quad 9.7141$
$(fl,2) = -\ 6''.5049\ .\ (ll,b) = 155.541$

Die Rechnung für die N, N', etc. steht nun vollständig so

$-(cd,2) = (0.70574)$
$-(ce,2) = (0.49185)$
$-(de,2) = (0.52341)$
$\quad 1.72100$
$M = (0.86050)$
$N = (0.33709)$
$N' = (0.36865) \qquad -(cf,2) = (0.16800)$
$N'' = (0.45476) \qquad N = (0.33709)$
$N''' = (9.83091) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9.83091$

und hieraus

$N^2 = \quad 4.7225$
$NN' = +5.0785,\quad N'^2 = \quad 5.4614$
$NN'' = +3.1035,\ N'N'' = +3.3374,\quad N''^2 = \quad 2.0395$
$NN''' = +1.4723,\ N'N''' = +1.5833,\ N''N''' = +0.9675,\ N'''^2 = 0.4590$

womit die Werthe

$(1,1) = \quad 14.3766\ ,\ (2,2,1) = \quad 15.0201$
$(3,3,2) = \quad 15.5792$
$(2,4,1) = +\ 0.4405\ ,\ (3,4,2) = -\ 6.1315$
$(1,l) = -\ 9''.1679\ ,\ (2,l,1) = +13''.3491,\ (3,l,2) = +\ 2''.3253$
$(4,4,1) = \quad 10.1731$
$(4,l,1) = -\ 6''.5049\ ,\ (ll,b) = 155.541$

erhalten werden, auf welche die betr. Ausdrücke des § 6 anzuwenden sind. Diese geben

$$\chi' = \quad (9.80461)\ ,\ (ll,1) = 149.695$$
$$\gamma'' = -(8.46728)\ ,\ \chi'' = -(9.94878)$$
$$(4,4,2) = \quad 10.1602$$
$$(4,l,2) = -\ 6''.8964\ ,\ (ll,2) = 137.831$$
$$\gamma''' = (9.59501)\ ,\ \chi''' = -(9.17404)$$
$$(4,4,3) = \quad 7.7471$$
$$(4,l,3) = -\ 5''.9810\ ,\ (ll,3) = 137.484$$
$$\chi'''' = (9.88763)$$
$$(ll,4) = 132.866$$

Dieser Werth von $(ll,4)$, welcher mit dem von $(ll,6)$ des Art. 84 identisch sein muss, stimmt mit diesem so nahe überein, wie die Ausdehnung der angewandten Logarithmen es gestattet. Es wird nun ferner durch die oben angezogenen Ausdrücke

$$w(1) = -\ 0''.6377$$
$$w(2) = +\ 0.9114$$
$$w(3) = -\ 0.1545$$
$$w(4) = -\ 0.7720$$

und diese müssen vor Allem der Bedingungsgleichung

$$Nw(1) + N'w(2) + N''w(3) + N'''w(4) = 0$$

genügen. Man findet

$N = (0.3371\ ),\ N' = (0.3687),\ \ N'' = (0.1548)\ ,\ \ N''' = (9.8309)$
$w(1) = (9.8046n), w(2) = (9.9597),\ w(3) = (9.1889n),\ w(4) = (9.8876n)$

und die vier Producte werden

$$-\ 1''.386$$
$$+\ 2.130$$
$$-\ 0.221$$
$$-\ 0.523$$
$$\text{Sa.} = \ 0.000$$

Zweitens müssen die Unterschiede der w mit denen des Art. 84 der Abhandlung übereinstimmen, und die Vergleichung zeigt, dass dieses auch der Fall ist.

13.

Zur Ausführung des zweiten Theils der Auflösung sind nun aus den vorhergehenden Rechnungen zu entlehnen,

$$(1,1) = (1.15766) \qquad \beta''' = -(8.46728)$$
$$(2,2,1) = (1.47667) \qquad \gamma''' = +(9.59501)$$
$$(3,3,2) = (1.19255)$$
$$(4,4,3) = (0.88914)$$

nebst den Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes, oder den $q(r,I)_1$, $q(r,II)_1$, etc., deren Werthe man im Art. 93 der Abhandlung findet. Die betr. im § 6 zusammengestellten Ausdrücke gaben,

r	s	$\log \eta(r,I)_1$	$\log \eta(r,II)_1$	$\log \eta(r,III)_1$	$\log \eta(r,IV)_1$	$\log \eta(r,V)_1$	$\log \eta(r,VI)_1$
1	1	0.	0. n		—	0.16280n	9.99860n
2		—	0.	0. n	—	9.81470	—
3		0. n	—	—	0.	—	9.28926
4		9.59301n	8.46728n	0.01257	9.78297n	9.89376	9.94385

r	s	$\log Q(r,I)_1$	$\log Q(r,II)_1$	$\log Q(r,III)_1$	$\log Q(r,IV)_1$	$\log Q(r,V)_1$	$\log Q(r,VI)_1$
1	1	8.84234	8.84234n	—	—	9.00514n	8.84094n
2		—	8.82333	8.82333n	—	8.63803	—
3		8.80745n	—	—	8.80745n	—	8.09674
4		8.70587n	7.57814n	9.12343	8.89365n	9.00462	9.05474

r	s	$\log f(r,I)_1$	$\log f(r,II)_1$	$\log f(r,III)_1$	$\log f(r,IV)_1$	$\log f(r,V)_1$	$\log f(r,VI)_1$
1	1	8.84234	8.84234n	—	—	9.00514n	8.84094n
2		7.47315	8.82406	8.84803n	7.36093	8.60735	7.52199n
3		8.92521n	7.17315n	8.71844	8.52349	8.59963	8.75690
4		8.70587n	7.57814n	9.12343	8.89365n	9.00462	9.05474

Aus der Verbindung der q mit diesen Werthen der f ergiebt sich der folgende Beitrag, den die Station (1) jetzt zu den Coefficienten der Endgleichungen liefert, dem ich die einzelnen Glieder, aus welchen er besteht, hinzufüge. Ich füge diesen ferner noch eine Abschrift der bez. Glieder hinzu, die zu den in der Abhandlung gegebenen Werthen gehören, damit man die neuen mit den alten Werthen vergleichen kann. Die oberen Abtheilungen der folgenden Tafel enthalten die neuen, und die unteren Abtheilungen die alten Werthe dieser Glieder.

r	s	logg.	(I,I)	logg.	(I,II)	logg.	(I,III)
1	1	8.84234	0.06955	8.84234n	−0.06955	—	—
2		—	—	—	—	—	—
3		8.92523	0.08418	7.47315	+0.00149	8.71844n	−0.05229
4		—	—	—	—	—	—
			0.15373		−0.06806		−0.05229
1	1	8.89734	0.07893	8.89734n	−0.07894	—	—
2		—	—	—	—	—	—
3		8.87386	0.07480	8.03663	+0.01088	8.71846n	−0.05229
4		—	—	—	—	—	—
			0.15373		−0.06806		−0.05229

r	s	logg.	(I,IV)	logg.	(I,V)	logg	(I,VI)
1	1	—	—	9.00514n	−0.10119	8.84094n	−0.06933
2		—	—	—	—	—	—
3		8.52349n	−0.03338	8.59963	−0.03977	8.75690n	−0.05714
4		—	—	—	—	—	—
			−0.03338		−0.14096		−0.12647
1		—	—	9.06014n	−0.11485	8.89594n	−0.07868
2		—	—	—	—	—	—
3		8.52349n	−0.03338	8.41694n	−0.02612	8.67923n	−0.04778
4		—	—	—	—	—	—
			−0.03338		−0.14097		−0.12646

r	s	logg.	(II,II)	logg.	(II,III)	logg.	(II,IV)
1	1	8.84234	0.06955	—	—	—	—
2		8.82406	0.06670	8.84803n	−0.07047	7.36093	+0.00230
3		—	—	—	—	—	—
4		—	—	—	—	—	—
			0.13625		−0.07047		+0.00230
1	1	8.89734	0.07894	—	—	—	—
2		8.75814	0.05729	8.84805n	−0.07047	7.36078	+0.00230
3		—	—	—	—	—	—
4		—	—	—	—	—	—
			0.13623		−0.07047		+0.00230

r	s	logg.	(II,V)	logg.	(II,VI)	logg.	(III,III)
1	1	9.00514	+0.10119	8.84094	+0.06933	—	—
2		8.60735	+0.04049	7.52199n	−0.00333	8.84803	0.07047
3		—	—	—	—	—	—
4		—	—	—	—	9.12342	0.13287
			+0.14168		+0.06600		0.20334

r	s	logg.		logg.		logg.	
1	1	9.06014	+0.11485	8.89594	+0.07868	—	—
2		8.42862	+0.02683	8.10332n	−0.01268	8.84805	0.07047
3		—	—	—	—	—	—
4		—	—	—	—	9.12342	0.13287
			+0.14168		+0.06600		0.20334
r	s	logg.	(III,IV)	logg.	(III,V)	logg.	(III,VI)
1	1	—	—	—	—	—	—
2		7.36093n	−0.00230	8.60735n	−0.04049	7.52199	+0.00333
3		—	—	—	—	—	—
4		8.83965n	−0.06913	9.00462	+0.10107	9.05471	+0.11343
			−0.07143		+0.06058		+0.11676
1	1	—	—	—	—	—	—
2		7.36078n	−0.00230	8.42862n	−0.02683	8.10332	+0.01268
3		—	—	—	—	—	—
4		8.89364n	−0.06913	8.94156	+0.08741	9.01732	+0.10407
			−0.07143		+0.06058		+0.11675
r	s	logg.	(IV,IV)	logg.	(IV,V)	logg.	(IV,VI)
1	1	—	—	—	—	—	—
2		—	—	—	—	—	—
3		8.52349	0.03338	8.59963	+0.03977	8.75690	+0.05714
4		8.89365	0.07828	9.00462n	−0.10107	9.05471n	−0.11343
			0.11166		−0.06130		−0.05629
1	1	—	—	—	—	—	—
2		—	—	—	—	—	—
3		8.52349	0.03338	8.41694	+0.02612	8.67923.	+0.04778
4		8.89364	0.07828	8.94156n	−0.08741	9.01732n	−0.10407
			0.11166		−0.06129		−0.05629
r	s	logg.	(V,V)	logg.	(V,VI)	logg.	(VI,VI)
1	1	9.16794	0.14721	9.00374	+0.10086	8.83954	0.06911
2		8.42205	0.02643	7.33669n	−0.00217	—	—
3		—	—	—	—	8.04616	0.01112
4		8.90886	0.08107	8.95895	+0.09098	8.95895	0.09098
			0.25471		+0.18967		0.17121
1	1	9.22294	0.16708	9.05874	+0.11418	8.89454	0.07844
2		6.24332	0.01751	7.91802n	−0.00828	—	—
3		—	—	—	—	7.96849	0.00930
4		8.84580	0.07011	8.92156	+0.08348	8.92156	0.08348
			0.25470		+0.18968		0.17122

Man erkennt hieraus, dass nach der neuen, hier ausgeführten Berechnung die Coefficienten der Endgleichungen unverändert dieselben bleiben, obgleich die einzelnen Glieder, aus welchen sie zusammenge-

setzt sind, grösstentheils sehr verschiedene Werthe haben. Die Unbekannten (I), (II), etc. dieser Gleichungen behalten daher jetzt auch noch dieselben Werthe, die im Art. 95 der Abhandlung gegeben sind. Verbindet man diese mit den oben gegebenen Werthen der f nach Anleitung des Art. 142, so bekommt man die folgenden Werthe der $z(r)$.

$$z(1) = +\ 0''.0937$$
$$z(2) = +\ 0.0603$$
$$z(3) = -\ 0.4529$$
$$z(4) = +\ 0.4460$$

Diese müssen zufolge des vorhergehenden Suppl. vor Allem der Gleichung

$$Nz(1) + N'z(2) + N''z(3) + N'''z(4) = 0$$

genügen, und die numerische Rechnung bestätigt dieses. Denn es werden

$$N = (0.3371)\ ,\ N' = (0.3687)\ ,\ N'' = (0.1548)\ ,\ N''' = (9.8309)$$
$$z(1) = (8.9717)\ ,\ z(2) = (8.7803)\ ,\ z(3) = (9.6560n),\ z(4) = (9.6493)$$

und die einzelnen Glieder der vorstehenden Gleichung

$$+\ 0''.2036$$
$$+\ 0\ .1409$$
$$-\ 0\ .6469$$
$$+\ 0\ .3021$$
$$\text{Sa.} = -\ 0\ .0003$$

welche Summe für Null zu achten ist. Die Unterschiede dieser Werthe der $z(r)$ müssen ferner mit den Unterschieden der in der Abhandlung im Art. 96 erhaltenen übereinstimmen, und die Vergleichung zeigt, dass dieses auch der Fall ist.

14.

Die Ausgleichung des betr. Dreiecksnetzes ist mit dem Vorhergehenden schon vollständig, auf die neue hier entwickelte Art, ausgeführt, ich werde aber um die betreffenden Ausdrücke zu erläutern, hier noch die wahrscheinlichsten Werthe der beiden überzähligen Richtungen berechnen. Durch die Ausdrücke des Art. 10 findet man

$$a' = (9.58273)$$
$$a'' = (9.20764)\ ,\ b'' = (9.04634)$$
$$a''' = (9.07761)\ ,\ b''' = (8.96300)$$
$$a^{IV} = (0.64116)\ ,\ b^{IV} = (9.70124)$$
$$a^{V} = (9.65337)\ ,\ b^{V} = (9.68960)$$

und hiemit, so wie mit den obigen Werthen der $\chi^{(a)}$, $\chi^{(b)}$, χ', etc.

$$w(a) = -0''.0204$$
$$w(b) = -0.9395$$

Der Unterschied dieser beiden, so wie die Unterschiede derselben mit den oben gefundenen Werthen der $w(1)$, $w(2)$, etc. müssen mit den Unterschieden der im Art. 84 der Abhandlung erhaltenen Werthe derselben Grössen übereinstimmen, und die Vergleichung zeigt, dass dieses auch der Fall ist.

Die Ausdrücke des Art. 10 geben ferner

r	s	$\log f(r,I)_1$	$\log f(r,II)_1$	$\log f(r,III)_1$	$\log f(r,IV)_1$	$\log f(r,V)_1$	$\log f(r,VI)_1$
a	1	$8.5992n$	$7.6958n$	8.7148	$7.8539n$	8.5362	8.6565
b		$8.6935n$	$7.5412n$	8.7701	$7.7812n$	8.6252	8.7330

und hiemit, so wie mit den Werthen der (I), (II), etc., die aus der Abhandlung zu nehmen sind, ergeben sich

$$z(a) = -0''.0505$$
$$z(b) = -0.0805$$

Der Unterschied dieser beiden, so wie die Unterschiede derselben mit den oben gefundenen Werthen der $z(1)$, $z(2)$, etc. müssen wieder mit den Unterschieden der im Art. 96 der Abhandlung erhaltenen Werthe derselben Grössen übereinstimmen, und man kann sich leicht überzeugen, dass dieses in der That der Fall ist.

Suppl. 5. Entwickelung eines besonderen Falles, in welchem die für die Ausgleichung auf der Station aufzulösenden Gleichungen sich in zwei oder mehrere, von einander völlig unabhängige Systeme zerlegen lassen.

1.

Wenn auf einer Station eine gewisse Anzahl der überhaupt beobachteten Richtungen in keinem Gyrus mit den übrigen Richtungen zugleich beobachtet worden ist, so ist von selbst klar, dass die Gleichungen, die für die Ausgleichung auf dieser Station aufzulösen sind, in zwei von einander unabhängige Systeme zerfallen müssen, und wenn auf derselben Station mehr solcher Lücken vorhanden sind, so müssen die genannten Gleichungen in mehr wie zwei von einander unabhängige

Systeme zerfallen. Um diese Fälle, die sich von selbst verstehen, handelt es sich aber hier nicht, sondern es soll gezeigt werden, dass die genannte Zerlegung sich auch auf den Stationen ausführen lässt, auf welchen eine gewisse Anzahl von Richtungen mit einer gewissen anderen Anzahl durch Eine, sowohl zugleich mit diesen wie mit jenen, beobachtete Richtung verbunden sind. Es wird dabei gezeigt werden, dass sich diese Zerlegung auf verschiedene Arten ausführen lässt.

2.

Es braucht nur der Fall der Zerlegung in zwei Systeme betrachtet zu werden, da die Behandlung der Fälle, wo mehr Zerlegungen möglich sind, daraus von selbst folgt. Die Richtung die mit allen anderen verbunden ist, will ich zuerst in der Reihenfolge voranstellen, und mit x bezeichnen, die übrigen eingeschnittenen Richtungen sollen mit x', x'', x''', etc. und $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, $x_{\prime\prime\prime}$, etc. bezeichnet und angenommen werden, dass die mit oben angehängten Strichen versehenen Richtungen mit denen, welchen die Striche unten angehängt worden sind, nicht zugleich beobachtet worden sind. Es können übrigens so viele verschiedenartige Gruppen von Gyris vorkommen, wie die Anzahl der Richtungen zulässt. Versieht man nun die Hülfsgrössen eben so mit oben und bez. unten angehängten Strichen, so findet man leicht, dass in dem hier in Betrachtung stehenden Falle die

$$\begin{array}{l} (p'p_{\prime}) = (p'p_{\prime\prime}) = (p'p_{\prime\prime\prime}) = \text{etc.} = 0 \\ (p''p_{\prime}) = (p''p_{\prime\prime}) = (p''p_{\prime\prime\prime}) = \text{etc.} = 0 \\ (p'''p_{\prime}) = (p'''p_{\prime\prime}) = (p'''p_{\prime\prime\prime}) = \text{etc.} = 0 \\ \qquad\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\quad \text{etc.} \end{array}$$

werden, und es werden daher, wenn das erste in der Abhandlung entwickelte Verfahren befolgt wird, die aufzulösenden Gleichungen die folgenden sein.

$$\begin{array}{l} \{Q+N^2-(pp)\}x+\{NN'-(pp')\}x'+\{NN''-(pp'')\}x''+\{NN'''-(pp''')\}x'''+\text{etc.} \\ \qquad +\{NN_{\prime}-(pp_{\prime})\}x_{\prime}+\{NN_{\prime\prime}-(pp_{\prime\prime})\}x_{\prime\prime}+\{NN_{\prime\prime\prime}-(pp_{\prime\prime\prime})\}x_{\prime\prime\prime}+\text{etc.}=(lx) \\ \{NN'-(pp')\}x+\{Q'+N'^2-(p'p')\}x'+\{N'N''-(p'p'')\}x''+\{N'N'''-(p'p''')\}x'''+\text{etc.} \\ \qquad + N'N_{\prime}x_{\prime} + N'N_{\prime\prime}x_{\prime\prime} + N'N_{\prime\prime\prime}x_{\prime\prime\prime} + \text{etc.}=(lx') \\ \{NN''-(pp'')\}x+\{N'N''-(p'p'')\}x'+\{Q''+N''^2-(p''p'')\}x''+\{N''N'''-(p''p''')\}x'''+\text{etc.} \\ \qquad + N''N_{\prime}x_{\prime} + N''N_{\prime\prime}x_{\prime\prime} + N''N_{\prime\prime\prime}x_{\prime\prime\prime} + \text{etc.}=(lx'') \\ \{NN'''-(pp''')\}x+\{N'N'''-(p'p''')\}x'+\{N''N'''-(p''p''')\}x''+\{Q'''+N'''^2-(p'''p''')\}x'''+\text{etc.} \\ \qquad + N'''N_{\prime}x_{\prime} + N'''N_{\prime\prime}x_{\prime\prime} + N'''N_{\prime\prime\prime}x_{\prime\prime\prime} + \text{etc.}=(lx''') \\ \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

$$\{NN_{,}-(pp_{,})\}x + N'N_{,}x' + N''N_{,}x'' + N'''N_{,}x''' + \text{etc.}$$
$$+\{Q_{,}+N_{,}^2-(p_{,}p_{,})\}x_{,}+\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,}N_{,,,}-(p_{,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,})$$
$$\{NN_{,,}-(pp_{,,})\}x + N'N_{,,}x' + N''N_{,,}x'' + N'''N_{,,}x''' + \text{etc.}$$
$$+\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,}+\{Q_{,,}+N_{,,}^2-(p_{,,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,,}N_{,,,}-(p_{,,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,,})$$
$$\{NN_{,,,}-(pp_{,,,})\}x + N'N_{,,,}x' + N''N_{,,,}x'' + N'''N_{,,,}x''' + \text{etc.}$$
$$+\{N_{,}N_{,,,}-(p_{,}p_{,,,})\}x_{,}+\{N_{,,}N_{,,,}-(p_{,,}p_{,,,})\}x_{,,}+\{Q_{,,,}+N_{,,,}^2-(p_{,,,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,,,})$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

3.

Um die eben erhaltenen Gleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme zu zerlegen braucht man nur

$$NN_{,} = (pp_{,})\,,\quad NN_{,,} = (pp_{,,})\,,\quad NN_{,,,} = (pp_{,,,})\,,\quad \text{etc.}$$
$$N' = 0\,,\quad N'' = 0\,,\quad N''' = 0\,,\quad \text{etc.}$$

zu setzen, denn hiemit bekommt man sogleich

$$\{Q+N^2-(pp)\}x \quad -(pp')x' \quad -(pp'')x'' \quad -(pp''')x''' \quad +\text{etc.}=(lx)$$
$$-(pp')x+\{Q'-(p'p')\}x' \quad -(p'p'')x'' \quad -(p'p''')x''' \quad +\text{etc.}=(lx')$$
$$-(pp'')x \quad -(p'p'')x'+\{Q''-(p''p'')\}x'' \quad -(p''p''')x''' \quad +\text{etc.}=(lx'')$$
$$-(pp''')x \quad -(p'p''')x' \quad -(p''p''')x''+\{Q'''-(p'''p''')\}x'''+\text{etc.}=(lx''')$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

$$\{Q_{,}+N_{,}^2-(p_{,}p_{,})\}x_{,}+\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,}N_{,,,}-(p_{,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,})$$
$$\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,}+\{Q_{,,}+N_{,,}^2-(p_{,,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,,}N_{,,,}-(p_{,,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,,})$$
$$\{N_{,}N_{,,,}-(p_{,}p_{,,,})\}x_{,}+\{N_{,,}N_{,,,}-(p_{,,}p_{,,,})\}x_{,,}+\{Q_{,,,}+N_{,,,}^2-(p_{,,,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,,,})$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Diese Gleichungen haben auch die allgemeine Form, die alle Gleichungen haben, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate hinführt.

Die obigen Gleichungen für die Bestimmung der betr. N lassen die erste dieser Grössen, nemlich N unbestimmt, und man kann daher noch eine Bedingung einführen. Setzt man

$$N_{,}N_{,,} = (p_{,}p_{,,})$$

so werden wie im Allgemeinen, nachdem

$$M = \sqrt{(pp_{,})(pp_{,,})(p_{,}p_{,,})}$$

gesetzt worden ist,

$$N = \frac{M}{(p_{,}p_{,,})}\,,\qquad N_{,,,} = \frac{(pp_{,,,})}{M}\,,$$
$$N_{,} = \frac{M}{(pp_{,,})}\,,\qquad \text{etc.}$$
$$N_{,,} = \frac{M}{(pp_{,})}\,,$$

und das zweite System von Gleichungen nimmt die folgende Form an

$$\begin{array}{l}
\{Q_{\prime}+N_{\prime}^2-(p_{\prime}p_{\prime})\}x_{\prime} \qquad\qquad +\{N_{\prime}N_{\prime\prime\prime}-(p_{\prime}p_{\prime\prime\prime})\,x_{\prime\prime\prime}+\text{etc.}=(lx_{\prime})\\
\qquad\qquad \{Q_{\prime\prime}+N_{\prime\prime}^2-(p_{\prime\prime}p_{\prime\prime})\}x_{\prime\prime}+\{N_{\prime\prime}N_{\prime\prime\prime}-(p_{\prime\prime}p_{\prime\prime\prime})x_{\prime\prime\prime}+\text{etc.}=(lx_{\prime\prime})\\
\{N_{\prime}N_{\prime\prime\prime}-(p_{\prime}p_{\prime\prime\prime})\}x_{\prime}+\{N_{\prime\prime}N_{\prime\prime\prime}-(p_{\prime\prime}p_{\prime\prime\prime})\}x_{\prime\prime}+\{Q_{\prime\prime\prime}+N_{\prime\prime\prime}^2-(p_{\prime\prime\prime}p_{\prime\prime\prime})\}x_{\prime\prime\prime}+\text{etc.}=(lx_{\prime\prime\prime})\\
\qquad\qquad \text{etc} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

welche auch mit der allgemeinen Form übereinstimmt. Ich bemerke hiezu noch, dass man durch dasselbe Verfahren auch die Zerlegung so bewirken kann, dass das eine System von Gleichungen die Unbekannten x, $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, $x_{\prime\prime\prime}$, etc. und das andere die x', x'', x''', etc. enthält. Man braucht zu dem Ende nur in den ersten allgemeinen Gleichungen die $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, $x_{\prime\prime\prime}$, etc. den x', x'', x''', etc. voran zu stellen.

4.

Um die Zerlegung in zwei Systeme auf eine andere Art auszuführen, werde ich der Richtung, die durchgängig beobachtet worden ist, den letzten Platz in der Reihenfolge der ersten Abtheilung von Richtungen anweisen, und diese daher so stellen,

$$x\ ,\ x'\ ,\ x''\ ,\ x'''\ ,\ \text{etc.}\ ,\ x^{(h-1)}$$

während die andere

$$x^{(h-1)}\ ,\ x_{\prime}\ ,\ x_{\prime\prime}\ ,\ x_{\prime\prime\prime}\ ,\ \text{etc.}$$

sein soll, und $x^{(h-1)}$ die durchgehends beobachtete Richtung bedeutet. Man kann jetzt die N ganz auf dieselbe Weise bestimmen, wie bei Anwendung des ersten Verfahrens der Abhandlung gezeigt worden ist, und ich will daher die Coefficienten in den allgemeinen, in der Abhandlung angewandten Zeichen ausdrücken. Da es leicht zu finden ist, dass nun immer

$$\begin{array}{l}
(pp_{\prime}) = (pp_{\prime\prime}) = (pp_{\prime\prime\prime}) = \text{etc.} = 0\\
(p'p_{\prime}) = (p'p_{\prime\prime}) = (p'p_{\prime\prime\prime}) = \text{etc.} = 0\\
(p''p_{\prime}) = (p''p_{\prime\prime}) = (p''p_{\prime\prime\prime}) = \text{etc.} = 0\\
\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

werden, so sollen auch

$$N_{\prime} = N_{\prime\prime} = N_{\prime\prime\prime} = \text{etc.} = 0$$

gesetzt werden, welches stets unbeschadet der eben genannten Bestimmungsart der übrigen N geschehen kann, ja eigentlich von selbst daraus folgt. Die allgemeinen Gleichungen, die man hierauf bekommt, werden nun die folgenden sein.

$$
\begin{aligned}
&(1,1)x && = (lx)\\
&(2,2,1)x + (2,4,1)x''' + \text{etc.} + (2,h,1)x^{(h-1)} && = (lx')\\
&(3,3,2)x'' + (3,4,2)x''' + \text{etc.} + (3,h,2)x^{(h-1)} && = (lx'')\\
&(2,4,1)x' + (3,4,2)x'' + (4,4,1)x''' + \text{etc.} + (4,h,1)x^{(h-1)} && = (lx''')\\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}\\
&(2,h,1)x' + (3,h,2)x'' + (4,h,1)x''' + \text{etc.} + (h,h,1)x^{(h-1)}\\
&\qquad + (h,h+1,1)x_{,} + (h,h+2,1)x_{,,} + (h,h+3,1)x_{,,,} + \text{etc.} && = (lx^{(h-1)})\\
&(h,h+1,1)x^{(h-1)} + (h+1,h+1,1)x_{,} + (h+1,h+2,1)x_{,,} + (h+1,h+3,1)x_{,,,} + \text{etc.} && = (lx_{,})\\
&(h,h+2,1)x^{(h-1)} + (h+1,h+2,1)x_{,} + (h+2,h+2,1)x_{,,} + (h+2,h+3,1)x_{,,,} + \text{etc.} && = (lx_{,,})\\
&(h,h+3,1)x^{(h-1)} + (h+1,h+3,1)x_{,} + (h+2,h+3,1)x_{,,} + (h+3,h+3,1)x_{,,,} + \text{etc.} && = (lx_{,,,})\\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Aber da hier $N_{,}$, $N_{,,}$, $N_{,,,}$, etc. Null sind, so entstehen, zufolge des Art. 71. der Abhandlung die folgenden Bedingungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
(h,h+1,1) + (h+1,h+1,1) + (h+1,h+2,1) + (h+1,h+3,1) + \text{etc.} &= 0\\
(h,h+2,1) + (h+1,h+2,1) + (h+2,h+2,1) + (h+2,h+3,1) + \text{etc.} &= 0\\
(h,h+3,1) + (h+1,h+3,1) + (h+2,h+3,1) + (h+3,h+3,1) + \text{etc.} &= 0\\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad & \text{etc.}
\end{aligned}
$$

addirt man daher die letzte Abtheilung der vorstehenden Gleichungen, nemlich diejenigen die nur die Unbekannten $x^{(h-1)}$, $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc. enthalten, zur nächst vorhergehenden Gleichung, die alle Unbekannten enthält, so geht diese letzt genannte in die folgende über.

$$
\begin{aligned}
&(2,h,1)x' + (3,h,2)x'' + (4,h,1)x''' + \text{etc.}\\
&+ \{(h,h,1) + (h,h+1,1) + (h,h+2,1) + (h,h+3,1) + \text{etc.}\}x^{(h-1)}\\
&= (lx^{(h-1)}) + (lx_{,}) + (lx_{,,}) + (lx_{,,,}) + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

aus welcher die Unbekannten $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc. eliminirt sind. Um aus den obigen Gleichungen, die diese Unbekannten nebst $x^{(h-1)}$ enthalten, diese letzt genannte zu eliminiren, braucht man in dieselben nur

$$
\begin{aligned}
(x_{,} - x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} &\quad \text{statt } x_{,}\\
(x_{,,} - x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} &\quad \text{statt } x_{,,}\\
(x_{,,,} - x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} &\quad \text{statt } x_{,,,}\\
\text{etc.} &\quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

zu substituiren, worauf vermöge der angeführten Bedingungsgleichungen die Coefficienten von $x^{(h-1)}$ verschwinden. Die obigen Gleichungen sind hiemit, abgesehen von der Gleichung

$$(1,1)x = (lx)$$

welche schon ein System für sich bildet, in die folgenden verwandelt worden, die zwei völlig von einander abgesonderte Systeme bilden.

$$(2,2,1)x' + (2,4,1)x''' + \text{etc.} + (2,h,1)x^{(h-1)} = (lx')$$
$$(3,3,2)x'' + (3,4,2)x''' + \text{etc.} + (3,h,2)x^{(h-1)} = (lx'')$$
$$(2,4,1)x' + (3,4,2)x'' + (4,4,1)x''' + \text{etc.} + (4,h,1)x^{(h-1)} = (lx''')$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$(2,h,1)x' + (3,h,2)x'' + (4,h,1)x''' + \text{etc.} + Hx^{(h-1)} = L$$
$$(h+1,h+1,1)x'_{,}+(h+1,h+2,1)x'_{,,}+(h+1,h+3,1)x'_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,})$$
$$(h+1,h+2,1)x'_{,}+(h+2,h+2,1)x'_{,,}+(h+2,h+3,1)x'_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,})$$
$$(h+1,h+3,1)x'_{,}+(h+2,h+3,1)x'_{,,}+(h+3,h+3,1)x'_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,,})$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

wo zur Abkürzuug

$$H = (h,h,1) + (h,h+1,1) + (h,h+2,1) + (h,h+3,1) + \text{etc.}$$
$$L = (lx^{(h-1)}) + (lx_{,}) + (lx_{,,}) + (lx_{,,,}) + \text{etc.}$$
$$x'_{,} = x_{,} - x^{(h-1)}$$
$$x'_{,,} = x_{,,} - x^{(h-1)}$$
$$x'_{,,,} = x_{,,,} - x^{(h-1)}$$
etc.

gesetzt worden sind. Auch diese Gleichungen haben, wie man sieht, die allgemeine Form, und die Bemerkung des vor. Art., dass sich ein zweites analoges Resultat erlangen lässt, kann hier wiederholt werden.

5.

Auch bei der Anwendung des zweiten Verfahreus der Abhandlung lässt sich in demselben Falle die Zerlegung der Gleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme ausführen. Nachdem alle N Null gemacht worden sind bekommt man zuerst das folgende System von Gleichungen, die den (61) der Abhandlung entsprechen,

$$(1,1)x + (1,2)x' + (1,3)x'' + (1,4)x''' + \text{etc.} + (1,h)x^{(h-1)} = (lx)$$
$$(1,2)x + (2,2)x' + (2,3)x'' + (2,4)x''' + \text{etc.} + (2,h)x^{(h-1)} = (lx')$$
$$(1,3)x + (2,3)x' + (3,3)x'' + (3,4)x''' + \text{etc.} + (3,h)x^{(h-1)} = (lx'')$$
$$(1,4)x + (2,4)x' + (3,4)x'' + (4,4)x''' + \text{etc.} + (4,h)x^{(h-1)} = (lx''')$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

$$\begin{aligned}
&(1,h)x + (2,h)x' + (3,h)x'' + (4,h)x''' + \text{etc.} \\
&+ (h,h)x^{(h-1)} + (h,h+1)x_{,} + (h,h+2)x_{,,} + (h,h+3)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx^{(h-1)}) \\
&(h,h+1)x^{(h-1)} + (h+1,h+1)x_{,} + (h+1,h+2)x_{,,} + (h+1,h+3)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,}) \\
&(h,h+2)x^{(h-1)} + (h+1,h+2)x_{,} + (h+2,h+2)x_{,,} + (h+2,h+3)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,}) \\
&(h,h+3)x^{(h-1)} + (h+1,h+3)x_{,} + (h+2,h+3)x'' + (h+3,h+3)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,,}) \\
&\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

und zwischen den Coefficienten dieser Gleichungen bestehen jetzt nach Art. 108 der Abhandlung die folgenden Bedingungsgleichungen,

$$\begin{aligned}
&(1,1) + (1,2) + (1,3) + (1,4) + \text{etc.} + (1,h) = 0 \\
&(1,2) + (2,2) + (2,3) + (2,4) + \text{etc.} + (2,h) = 0 \\
&(1,3) + (2,3) + (3,3) + (3,4) + \text{etc.} + (3,h) = 0 \\
&(1,4) + (2,4) + (3,4) + (4,4) + \text{etc.} + (4,h) = 0 \\
&\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1,h) + (2,h) + (3,h) + (4,h) + \text{etc.} \\
&+ (h,h) + (h,h+1) + (h,h+2) + (h,h+3) + \text{etc.} = 0 \\
&(h,h+1) + (h+1,h+1) + (h+1,h+2) + (h+1,h+3) + \text{etc.} = 0 \\
&(h,h+2) + (h+1,h+2) + (h+2,h+2) + (h+2,h+3) + \text{etc.} = 0 \\
&(h,h+3) + (h+1,h+3) + (h+2,h+3) + (h+3,h+3) + \text{etc.} = 0 \\
&\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(lx) + (lx') + (lx'') + (lx''') + \text{etc.} + (lx^{(h-1)}) \\
&+ (lx_{,}) + (lx_{,,}) + (lx_{,,,}) \text{ etc.} = 0
\end{aligned}$$

durch welche bewirkt wird, dass die Summe der vorstehenden Gleichungen identisch Null ist, und folglich jede derselben in den übrigen enthalten ist.

6.

Die Zerlegung der Gleichungen des vor. Art. in zwei von einander unabhängige Systeme kann nun auf die folgende Weise bewirkt werden. Substituirt man zuerst

$$\begin{aligned}
&(x'-x) + x \text{ statt } x' \\
&(x''-x) + x \quad — \quad x'' \\
&(x'''-x) + x \quad — \quad x''' \\
&\qquad \text{etc.} \\
&(x^{(h-1)}-x) + x \text{ statt } x^{h-1} \\
&(x_{,}-x) \quad + x \quad — \quad x_{,} \\
&(x_{,,}-x) \quad + x \quad — \quad x_{,,} \\
&(x_{,,,}-x) \quad + x \quad — \quad x_{,,,} \\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

in diese Gleichungen, so gehen sie in die folgenden über,

$$
\begin{array}{lr}
(1,2)(x'-x) + (1,3)(x''-x) + (1,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (1,h)(x^{(h-1)}-x) & =(lx) \\
(2,2)(x'-x) + (2,3)(x''-x) + (2,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (2,h)(x^{(h-1)}-x) & =(lx') \\
(2,3)(x'-x) + (3,3)(x''-x) + (3,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (3,h)(x^{(h-1)}-x) & =(lx'') \\
(2,4)(x'-x) + (3,4)(x''-x) + (4,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (4,h)(x^{(h-1)}-x) & =(lx''') \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
(2,h)(x'-x) + (3,h)(x''-x) + (4,h)(x'''-x) + \text{etc.} & \\
+(h,h)(x^{(h-1)}-x) + (h,h+1)(x_{,}-x) + (h,h+2)(x_{,,}-x) + (h,h+3)(x_{,,,}-x) + \text{etc.} & =(lx^{(h-1)}) \\
(h,h+1)(x^{(h-1)}-x) + (h+1,h+1)(x_{,}-x) + (h+1,h+2)(x_{,,}-x) + (h+1,h+3)(x_{,,,}-x) + \text{etc.} & =(lx_{,}) \\
(h,h+2)(x^{(h-1)}-x) + (h+1,h+2)(x_{,}-x) + (h+2,h+2)(x_{,,}-x) + (h+2,h+3)(x_{,,,}-x) + \text{etc.} & =(lx_{,,}) \\
(h,h+3)(x^{(h-1)}-x) + (h+1,h+3)(x_{,}-x) + (h+2,h+3)(x_{,,}-x) + (h+3,h+3)(x_{,,,}-x) + \text{etc.} & =(lx_{,,,}) \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} &
\end{array}
$$

von welchen immer noch jede in den übrigen enthalten ist, da ihre Summe wieder identisch Null ist. Aber jetzt ist die Anzahl der Gleichungen um Eins grösser wie die Anzahl der Unbekannten, und wir dürfen und müssen daher Eine derselben weglassen. Die übrigen Gleichungen werden hierauf von einander unabhängig, und können vollständig aufgelöst werden. Da die weggelassene Gleichung in den übrigen enthalten ist, so wird ihr durch die Auflösung dieser letzteren von selbst Gnüge geleistet. Es ist in der That gleichgültig, welche Gleichung man weglässt, aber um die allgemeine Form dieser Gleichungen zu bewahren, muss man die erste derselben weglassen.

7.

Um die Zerlegung auszuführen kann man jetzt eben so verfahren wie oben im Art 4. Man addire die zweite Ahtheilung der Gleichungen des vor. Art., hierauf ergiebt sich vermöge der Bedingungsgleichungen des Art. 5 ohne Weiteres eine Gleichung, in welcher die Unbekannten $x_{,}-x$, $x_{,,}-x$, $x_{,,,}-x$, etc. verschwunden sind. Um ferner die Unbekannte $x^{(h-1)}-x$ aus der zweiten Abtheilung zu eliminiren ist weiter nichts nöthig wie in jeder dieser, mit Ausnahme der ersten,

$$
\begin{array}{lcl}
(x_{,}-x^{(h-1)}) + (x^{(h-1)}-x) & \text{statt} & x_{,}-x \\
(x_{,,}-x^{(h-1)}) + (x^{(h-1)}-x) & - & x_{,,}-x \\
(x_{,,,}-x^{(h-1)}) + (x^{(h-1)}-x) & - & x_{,,,}-x \\
\text{etc.} & &
\end{array}
$$

zu schreiben. Die Gleichungen, die durch dieses Verfahren hervorgehen, sind

$$\begin{array}{ll}
(2,2)(x'-x) + (2,3)(x''-x) + (2,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (2,h)(x^{(h-1)}-x) & = (lx') \\
(2,3)(x'-x) + (3,3)(x''-x) + (3,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (3,h)(x^{(h-1)}-x) & = (lx'') \\
(2,4)(x'-x) + (3,4)(x''-x) + (4,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (4,h)(x^{(h-1)}-x) & = (lx''') \\
\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} & \\
(2,h)(x'-x) + (3,h)(x''-x) + (4,h)(x'''-x) + \text{etc.} + H'(x^{(h-1)}-x) & = L'
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(h+1,h+1)(x_{,}-x^{(h-1)})+(h+1,h+2)(x_{,,}-x^{(h-1)})+(h+1,h+3)(x_{,,,}-x^{(h-1)})+\text{etc.}=(lx_{,}) \\
(h+1,h+2)(x_{,}-x^{(h-1)})+(h+2,h+2)(x_{,,}-x^{(h-1)})+(h+2,h+3)(x_{,,,}-x^{(h-1)})+\text{etc.}=(lx_{,,}) \\
(h+1,h+3)(x_{,}-x^{(h-1)})+(h+2,h+3)(x_{,,}-x^{(h-1)})+(h+3,h+3)(x_{,,,}-x^{(h-1)})+\text{etc.}=(lx_{,,,}) \\
\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

wo

$$H' = (h,h) + (h,h+1) + (h,h+2) + (h,h+3) + \text{etc.}$$
$$L' = (lx^{(h-1)}) + (lx_{,}) + (lx_{,,}) + (lx_{,,,}) + \text{etc.}$$

sind. Die vorstehenden Gleichungen bilden wieder, wie man sieht, zwei von einander unabhängige Systeme, und das zweite dieser ist mit dem im Art. 4 erhaltenen identisch, da man hier, gleich wie dort geschehen ist, allen Coefficienten als dritten Index die Zahl 1 hinzufügen kann.

8.

Eine andere Art der Zerlegung wird auf die folgende Weise bewirkt. In die Gleichungen des Art. 5 substituire man durchgeheuds

$$\begin{array}{ll}
(x-x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} & \text{statt } x \\
(x'-x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} & \;\;\text{—}\;\; x' \\
\text{etc.} & \\
(x_{,}-x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} & \;\;\text{—}\;\; x_{,} \\
\text{etc.} &
\end{array}$$

worauf diese sich in die folgenden verwandeln

$$\begin{array}{ll}
(1,1)u + (1,2)u' + (1,3)u'' + (1,4)u''' + \text{etc.} & = (lx) \\
(1,2)u + (2,2)u' + (2,3)u'' + (2,4)u''' + \text{etc.} & = (lx') \\
(1,3)u + (2,3)u' + (3,3)u'' + (3,4)u''' + \text{etc.} & = (lx'') \\
(1,4)u + (2,4)u' + (3,4)u'' + (4,4)u''' + \text{etc.} & = (lx''') \\
\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1,h)u + (2,h)u' + (3,h)u'' + (4,h)u''' + \text{etc.} \\ + (h,h+1)u_{,} + (h,h+2)u_{,,} + (h,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx^{(h-1)}) \\ (h+1,h+1)u_{,} + (h+1,h+2)u_{,,} + (h+1,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,}) \\ (h+1,h+2)u_{,} + (h+2,h+2)u_{,,} + (h+2,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,}) \\ (h+1,h+3)u_{,} + (h+2,h+3)u_{,,} + (h+3,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,,}) \\ \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

in welchen zur Abkürzung durchgehends

$$u = x - x^{(h-1)}$$
$$u' = x' - x'^{(h-1)}$$
$$\text{etc.}$$

gesetzt worden ist, und da es hier die h^{te} Gleichung ist, die weggelassen werden muss, um die allgemeine Form der Gleichungen zu bewahren, so sind die aufzulösenden Gleichungen,

$$\begin{array}{l} (1,1)u + (1,2)u' + (1,3)u'' + (1,4)u''' + \text{etc.} = (lx) \\ (1,2)u + (2,2)u' + (2,3)u'' + (2,4)u''' + \text{etc.} = (lx') \\ (1,3)u + (2,3)u' + (3,3)u'' + (3,4)u''' + \text{etc.} = (lx'') \\ (1,4)u + (2,4)u' + (3,4)u'' + (4,4)u''' + \text{etc.} = (lx''') \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\ (h+1,h+1)u_{,} + (h+1,h+2)u_{,,} + (h+1,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,}) \\ (h+1,h+2)u_{,} + (h+2,h+2)u_{,,} + (h+2,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,}) \\ (h+1,h+3)u_{,} + (h+2,h+3)u_{,,} + (h+3,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,,}) \\ \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

die auch in zwei von einander abgesonderte Systeme zerfallen, deren jedes die allgemeine Form hat. Das zweite System ist wieder mit den zwei zunächst vorhergehenden identisch. Es würden sich wohl noch mehr Verfahren angeben lassen um diese Zerlegung zu bewirken, allein ich will es bei den im Vorhergehenden erklärten bewenden lassen.

9.

Als Beispiel zu den vorhergehenden Entwickelungen soll die Station Mallwischken der Preuss. Landestriangulation des Jahres 1858 dienen auf welcher unter anderen der hier abgehandelte Fall eintritt *). Für die Bezeichnungen werde ich die wählen, die in der Abhandlung für die

*) S. Die Königl. Preuss. Landestriangulation. Hauptdreiecke. Erster Theil, etc. Berlin 1866.

Anwendung als die zweckmässigste erkannt worden sind. Es sollen demgemäss die eingeschnittenen Gegenstände,

Szillen mit (1)
Ob. Eissuln — (2)
Wersmeningken — (3)
Pillkallen — (4)
Kattenau — (5)
Schwentischken — (6)
Kucklinsberg — (7)

und demgemäss die Hülfsgrössen und die Coefficienten der Gleichungen bezeichnet werden. Lässt man nun vorläufig die Centrirungen weg, welches fast immer, und hier jedenfalls zulässig ist, so steht das erste Stationstäfelchen wie folgt,

r	Vorl. Werthe	20	4	4	24
(1)	0° 0′ 0″	0″00	0″00	—	—
(2)	31 50 10	−25,40	−15,55	—	—
(3)	77 34 45	+28,40	− 4,70	0″00	—
(4)	149 30 30	− 2,03	—	− 7,40	—
(5)	164 13 45	+ 2,29	—	− 9,15	0″00
(6)	191 48 45	—	—	—	+21,85
(7)	254 15 55	—	—	—	+55,93
	Summen	+ 3″26	−20″25	−16″55	+77″78
	Mittel	+ 0″652	− 6″750	− 5″517	+25″927

von welchen Daten in jedem Falle ausgegangen werden muss.

10.

Es soll nun zuerst die Ausgleichung auf dieser Station ohne Anwendung der Zerlegung der Gleichungen in zwei, von einander unabhängige, Systeme ausgeführt werden, und es soll hiebei die Reihenfolge der Richtungen so gewählt werden wie im Art. 2 verlangt wurde. Es soll also die durchgehends beobachtete Richtung allen übrigen vorangestellt werden, und das Täfelchen des vor. Art. zeigt, dass dieses die Richtung (5) ist. Das zweite Stationstäfelchen steht also wie folgt.

No.	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(6)	(7)	p	P	$p^2 : P$
1	+ 1″638	−0″652	−26″052	+27″748	−2″682	—	—	20	100	4,0
2	—	+6,750	− 8,800	+ 2,050	—	—	—	4	12	1,3333
3	− 3,633	—	—	+ 5,516	−1″883	—	—	4	12	1,3333
4	−25,927	—	—	—	—	−4″077	+30″004	24	72	8,0
(lx)	−27″922	+6″098	−34″852	+35″314	−4″565	−4″077	+30″004	Sa.	196	
Q	48	24	24	28	24	24	24	=	196	

Wählen wir nun die Accente und Indices in der natürlichen Reihenfolge, ungeachtet dieses in der Numerirung der Richtungen nicht der Fall ist, so erhalten wir das folgende Täfelchen der (pp).

	p	p'	p''	p'''	p^{iv}	p^{v}	p^{vi}
p	13.3333	4.0	4.0	5.3333	5.3333	8.0	8.0
p'		5.3333	5.3333	5.3333	4.0	0	0
p''			5.3333	5.3333	4.0	0	0
p'''				6.6667	5.3333	0	0
p^{iv}					5.3333	0	0
p^{v}						8.0	8.0
p^{vi}							8.0

Die Berechnung der N und der zu den Controlen erforderlichen Grössen, die nach den Angaben der Abhandlungen auszuführen ist, steht nun im Einzelnen wie folgt, wo ich der Kürze wegen die Bezeichnung ob Logarithmus oder Zahl weggelassen habe, da dieses ohnehin erkennbar ist.

$(pp') \ldots 0.60206$ $\qquad$ $(pp''') \ldots 0.72700$, $(pp^{iv}) \ldots 0.72700$

$(pp'') \ldots 0.60206$ $\qquad$ $N \ldots 0.23856$, $\ldots 0.23856$

$(p'p'') \ldots 0.72700$ $\qquad$ $(pp^{v}) \ldots 0.90309$, $(pp^{vi}) \ldots 0.90309$

1.93112

$M \ldots 0.96556$

$N \ldots 0.23856 = 1.7320$

$N' \ldots 0.36350 = 2.3094$

$N'' \ldots 0.36350 = 2.3094$

$N''' \ldots 0.48844 = 3.0792$

$N^{iv} \ldots 0.48844 = 3.0792$

$N^{v} \ldots 0.66453 = 4.6188$

$N^{vi} \ldots 0.66453 = 4.6188$

$\Sigma N \ldots 1.33739 = 21.7468$

$N \Sigma N \ldots 1.57595 = 37.666$

$N' \Sigma N \ldots 1.70089 = 50.221$

$N'' \Sigma N \ldots 1.70089 = 50.221$

$N''' \Sigma N \ldots 1.82583 = 66.962$

$N^{iv} \Sigma N \ldots 1.82583 = 66.962$

$N^{v} \Sigma N \ldots 2.00192 = 100.443$

$N^{vi} \Sigma N \ldots 2.00192 = 100.443$

Die Coefficienten der aufzulösenden Gleichungen bekommen hierauf die folgenden Werthe.

$(1,1) = 37.667$, $(3,3,2) = 24.0$, $(4,4,1) = 30.8149$
$(2,2,1) = 24.0$, $(3,4,2) = +1.7779$, $(4,5,1) = +4.1483$
$(2,4,1) = +1.7779$, $(3,5,2) = +3.1112$, $(4,6,1) = +14.222$
$(2,5,1) = +3.1112$, $(3,6,2) = +10.6667$, $(4,7,1) = +14.222$
$(2,6,1) = +10.6667$, $(3,7,2) = +10.6667$
$(2,7,1) = +10.6667$
$(5,5,1) = 28.1483$, $(6,6,1) = 37.333$, $(7,7,1) = 37.333$
$(5,6,1) = +14.222$, $(6,7,1) = +13.333$ $(ll) = 182.752$
$(5,7,1) = +14.222$

Durch die vorstehenden Zahlenwerthe sind diese Coefficienten controlirt worden. Die fernere Rechnung giebt nun nach und nach

$$\chi' = +(9.86999)$$
$$(ll,1) = 162.054$$
$$\gamma'' = -(8.86970),\ \delta'' = -(9.11272),\ \varepsilon'' = -(9.64782)$$
$$\zeta'' = -(9.64782),\ \chi'' = -(9.40498)$$

$(4,4,2) = 30.6832$
$(4,5,2) = +3.9178$, $(5,5,2) = 27.7450$
$(4,6,2) = +13.4318$, $(5,6,2) = +12.8392$, $(6,6,2) = 32.5925$
$(4,7,2) = +13.4318$, $(5,7,2) = +12.8392$, $(6,7,2) = +8.5925$
$(4,l,2) = +34''.8624$, $(5,l,2) = -5''.3555$, $(6,l,2) = -6''.7873$

$(7,7,2) = 32.5925$
$(7,l,2) = +27''.2937$, $(ll,2) = 160.505$

$\gamma''' = -(8.86970)$, $\delta''' = -(9.11272)$, $\varepsilon'' = -(9.64782)$
$\zeta''' = -(9.64782)$, $\chi''' = +(0.16202)$

$(4,4,3) = 30.5515$
$(4,5,3) = +3.6873$, $(5,5,3) = 27.3417$
$(4,6,3) = +12.6416$, $(5,6,3) = +11.4564$, $(6,6,3) = 27.8517$
$(4,7,3) = +12.6416$, $(5,7,3) = +11.4564$, $(6,7,3) = +3.8517$
$(4,l,3) = +37''.4441$, $(5,l,3) = -0''.8375$, $(6,l,3) = +8''.7027$

$(7,7,3) = 27.8517$
$(7,l,3) = 42''.7837$ $(ll,3) = 109.894$

$\delta'' = -(9.08167)$, $\varepsilon'' = -(9.61677)$, $\zeta'' = -(9.61677)$
$\chi'' = -(0.08835)$

$(5,5,4) = 26.8967$
$(5,6,4) = +9.9306$, $(6,6,4) = 22.6208$
$(5,7,4) = +9.9306$, $(6,7,4) = -1.3792$, $(7,7,4) = 22.6208$
$(5,l,4) = -5''.3567$, $(6,l,4) = -6''.7909$, $(7,l,4) = +27''.2901$

$(ll,4) = 64.003$
$\varepsilon' = -(9.56727)$, $\zeta' = -(9.56727)$, $\chi' = +(9.29920)$

$(6,6,5) = 18.9544$
$(6,7,5) = -5.0456$, $(7,7,5) = 18.9544$
$(6,l,5) = -4''.8132$, $(7,l,5) = +29''.2678$, $(ll,5) = 62.936$
$\zeta'' = +(9.42520)$, $\chi'' = +(9.40473)$
$(7,7,6) = 17.6111$
$(7,l,6) = +27''.9865$, $(ll,6) = 61.714$
$\chi''' = -(0.20116)$
$(ll,7) = 17.240$

Ferner

$\beta''' = -(8.86970)$, $\beta'' = -(9.08167)$, $\beta' = -(9.56730)$, $\beta'' = -(9.66980)$
$\gamma''' = -(8.86970)$, $\gamma'' = -(9.08167)$, $\gamma' = -(9.56730)$, $\gamma'' = -(9.66980)$
$\delta'' = -(9.08167)$, $\delta' = -(9.56730)$, $\delta'' = -(9.66980)$
$\varepsilon' = -(9.56727)$, $\varepsilon'' = -(9.66980)$
$\zeta'' = +(9.42520)$

und hiemit

$w(1) = -0''.462$
$w(2) = -2.168$
$w(3) = +0.600$
$w(4) = -0.848$
$w(5) = -0.741$
$w(6) = +0.169$
$w(7) = +1.589$

Diese müssen nun vor Allem der oft erwähnten Bedingungsgleichung genügen, die Producte die diese giebt sind

$$N.w(5) = -1''.284$$
$$N'.w(1) = -1.067$$
$$N''.w(2) = -5.007$$
$$N'''.w(3) = +1.849$$
$$N''.w(4) = -2.612$$
$$N'.w(6) = +0.781$$
$$N''.w(7) = +7.340$$
$$\text{Sa.} = 0.000$$

wie es sein muss. Es müssen nun nicht nur die vorstehenden Werthe der $w(r)$ den im vor. Art. angenommenen, vorläufigen Werthen der Richtungen hinzugefügt, sondern es müssen auch die Centrirungen berücksichtigt werden. Diese findet man in dem oben angezogenen Werke Seite 36, und fügt man, der leichteren Vergleichung wegen, jeder derselben 0″.462 hinzu, so ergiebt sich die folgende Zusammenstellung.

r	Vorl. Werthe	Centr.	$w(r)$	Ausgegl. Richt.
(1)	0° 0′ 0″	+ 8″.822	−0″.462	0° 0′ 8″.360
(2)	31 50 40	+ 6.867	−2.168	31 50 44.699
(3)	77 34 45	+ 3.840	+0.600	77 34 49.440
(4)	149 13 30	− 3.943	−0.848	149 13 25.209
(5)	161 13 45	−14.276	−0.741	161 13 29.983
(6)	191 48 45	− 7.681	+0.469	191 48 37.488
(7)	254 45 55	− 1.532	+1.589	254 45 55.057

die mit den Resultaten des angezogenen Werks übereinstimmen.

11.

Es soll jetzt unser Beispiel mit Anwendung der im Art. 3 erklärten Zerlegung der Gleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme ausgeführt werden. Um möglichste Verschiedenheit in der Behandlung herbeizuführen sollen den Richtungen (6) und (7) die zweite und dritte Stelle in der Reihenfolge gegeben werden. Das zweite Stationstäfelchen steht daher jetzt wie folgt.

No.	(5)	(6)	(7)	(1)	(2)	(3)	(4)	p	P	$p^2:P$
1	+ 1″.638	—	—	−0″.652	−26″.052	+27″.748	−2″.682	20	100	4.0
2	—	—	—	+6.750	− 8.800	+ 2.050	—	4	12	1.3333
3	− 3.633	—	—	—	—	+ 5.516	−1.883	4	12	1.3333
4	−25.927	−1″.077	+30″.004	—	—	—	—	24	72	8.0
(lx)	−27″.922	−1″.077	+30″.004	+6″.098	−34″.852	+35″.314	−4.565	Sa.	196	
Q	48	24	24	24	24	28	24	=	196	

und die (pp) erhalten hierauf die folgenden Werthe.

	p	p'	p''	$p_{,}$	$p_{,,}$	$p_{,,,}$	$p_{,\text{iv}}$
p	13.3333	8.0	8.0	4.0	4.0	5.3333	5.3333
p'		8.0	8.0	0	0	0	0
p''			8.0	0	0	0	0
$p_{,}$				5.3333	5.3333	5.3333	4.0
$p_{,,}$					5.3333	5.3333	4.0
$p_{,,,}$						6.6667	5.3333
$p_{,\text{iv}}$							5.3333

Es wird nun zuerst

$$N' = 0\ ,\ \ N'' = 0$$

und für die Bestimmung der übrigen N ergiebt sich die folgende Rechnung

$(pp_{,})$ ... 0.60206 $\qquad$ $(pp_{,,,})$ ... 0.72700 $= (pp_{\text{iv}})$

$(pp_{,,})$ ... 0.60206 $\qquad$ N ... 0.23856

$(p_{,}p_{,,})$ ... 0.72700

1.93112

M ... 0.96556

N ... 0.23856 = 1.7320

$N_{,}$ ... 0.36350 = 2.3094

$N_{,,}$ ... 0.36350 = 2.3094

$N_{,,,}$ ... 0.48844 = 3.0792

N_{iv} ... 0.48844 = 3.0792

ΣN ... 1.09723 = 12.5092

$N\Sigma N$ ... 1.33579 = 21.667

$N_{,}\Sigma N$ ... 1.46073 = 28.889

$N_{,,}\Sigma N$ ... 1.46073 = 28.889

$N_{,,,}\Sigma N$ ... 1.58567 = 38.518

$N_{\text{iv}}\Sigma N$ ... 1.58567 = 38.518

Die Coefficienten des ersten Systems von Gleichungen folgen hieraus

$(1,1) = 37.667$

$(1,2) = -8.0\ ,\ (2,2) = 16.0$

$(1,3) = -8.0\ ,\ (2,3) = -8.0\ ,\ (3,3) = 16.0$

und die des zweiten Systems

$(4,4,3) = 24.0$

$(4,5,3) = 0 \quad ,(5,5,3) = 24.0$

$(4,6,3) = +1.7779, (5,6,3) = +1.7779, (6,6,3) = 30.8149$

$(4,7,3) = +3.1112, (5,7,3) = +3.1112, (6,7,3) = +4.1483, (7,7,3) = 28.1483$

ausserdem wie vorher $(ll) = 182.752$

die durch die vorhergehenden Zahlenwerthe controlirt worden sind.

Es ist sehr dienlich bei der Auflösung dieser Gleichungen beide Systeme als Ein System zu betrachten, in welchem sich das zweite unmittelbar an das erste knüpft, und dem gemäss alle Bezeichnungen zu wählen. Aus diesem Grunde sind im zweiten System für die Bezeichnungen der Coefficienten (4,4,3), (4,5,3), etc statt (4,4), (4,5), etc. eingeführt worden. Die Auflösung kann nun durchaus nach den allgemeinen Formeln für Ein System ausgeführt werden, und giebt nach und nach die folgenden Zahlenwerthe

$\alpha' = +(9.32713)$, $\beta' = +(9.32713)$, $\chi' = +(9.86999)$

$(2,2,1) = 14.3009$

$(2,3,1) = -\ 9.6991$, $(3,3,1) = 14.3009$

$(2,l,1) = -10''.0074$, $(3,4,1) = +24''.0736$, $(ll,1) = 162.053$

$\beta'' = +(9.83137)$, $\chi'' = +(9.84495)$

$(3,3,2) = 7.7226$

$(3,l,2) = -17''.2864$, $(ll,2) = 155.050$

$\gamma''' = \delta''' = \text{etc.} = 0$, $\chi''' = -(0.34994)$

(4,4,3), (4,5,3), etc. } wie oben, $(ll,3) = 116.355$
(5,5,3), etc. }

$\delta^{IV} = 0$, $\varepsilon^{IV} = -(8.86970)$, $\zeta^{IV} = -(9.11272)$, $\chi^{IV} = -(9.40498)$

$(5,5,4) = 24.0$

$(5,6,4) = +1.7779$, $(6,6,4) = 30.6832$

$(5,7,4) = +3.1112$, $(6,7,4) = +3.9178$, $(7,7,4) = 27.7450$

$(5,l,4) = -34''.852$, $(6,l,4) = +34''.8623$, $(7,l,4) = 114.806$, $(ll,4) = 114.806$

$\varepsilon^{V} = -(8.86970)$, $\zeta^{V} = -(9.11272)$, $\chi^{V} = +(0.16202)$

$(6,6,5) = 30.5515$

$(6,7,5) = +\ 3.6873$, $(7,7,5) = 27.3417$

$(6,l,5) = +37''.4441$, $(7,l,5) = -0''.8375$, $(ll,5) = 64.195$

$\zeta^{VI} = -(9.08168)$, $\chi^{VI} = -(0.08835)$

$(7,7,6) = 26.8967$

$(7,l,6) = -5''.3567$, $(ll,6) = 18.304$

$\chi^{VII} = +(9.29920)$

$(ll,7) = 17.237$ (möglichst nahe wie oben.)

Für die Berechnung der übrigen Grössen ziehe ich vor die betreffenden

Formeln ohne Abkürzungen vollständig herzusetzen, da bei gegenwärtigem Verfahren die Grössen, die Null werden, in verschiedenen Fällen verschiedene Stellen einnehmen. Um die Fortsetzung möglichst zu erleichtern, sollen diese Formeln für sieben Unbekannte angesetzt werden. Sie sind

$$
\begin{array}{rcllllll}
\alpha'' & = & \beta' & + \beta''\alpha' & & & & \\
\beta'' & = & & \beta'' & & & & \\
\hline
\alpha''' & = & \gamma' & + \gamma''\alpha' & + \gamma'''\alpha'' & & & \\
\beta''' & = & & \gamma'' & + \gamma'''\beta'' & & & \\
\gamma''' & = & & & \gamma''' & & & \\
\hline
\alpha^{IV} & = & \delta' & + \delta''\alpha' & + \delta'''\alpha'' & + \delta^{IV}\alpha''' & & \\
\beta^{IV} & = & & \delta'' & + \delta'''\beta'' & + \delta^{IV}\beta''' & & \\
\gamma^{IV} & = & & & \delta''' & + \delta^{IV}\gamma''' & & \\
\delta^{IV} & = & & & & \delta^{IV} & & \\
\hline
\alpha^{V} & = & \varepsilon' & + \varepsilon''\alpha' & + \varepsilon'''\alpha'' & + \varepsilon^{IV}\alpha''' & + \varepsilon^{V}\alpha^{IV} & \\
\beta^{V} & = & & \varepsilon'' & + \varepsilon'''\beta'' & + \varepsilon^{IV}\beta''' & + \varepsilon^{V}\beta^{IV} & \\
\gamma^{V} & = & & & \varepsilon''' & + \varepsilon^{IV}\gamma''' & + \varepsilon^{V}\gamma^{IV} & \\
\delta^{V} & = & & & & \varepsilon^{IV} & + \varepsilon^{V}\delta^{IV} & \\
\varepsilon^{V} & = & & & & & \varepsilon^{V} & \\
\hline
\alpha^{VI} & = & \zeta' & + \zeta''\alpha' & + \zeta'''\alpha'' & + \zeta^{IV}\alpha''' & + \zeta^{V}\alpha^{IV} & + \zeta^{VI}\alpha^{V} \\
\beta^{VI} & = & & \zeta'' & + \zeta'''\beta'' & + \zeta^{IV}\beta''' & + \zeta^{V}\beta^{IV} & + \zeta^{VI}\beta^{V} \\
\gamma^{VI} & = & & & \zeta''' & + \zeta^{IV}\gamma''' & + \zeta^{V}\gamma^{IV} & + \zeta^{VI}\gamma^{V} \\
\delta^{VI} & = & & & & \zeta^{IV} & + \zeta^{V}\delta^{IV} & + \zeta^{VI}\delta^{V} \\
\varepsilon^{VI} & = & & & & & \zeta^{V} & + \zeta^{VI}\varepsilon^{V} \\
\zeta^{VI} & = & & & & & & \zeta^{VI} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcllllll}
-w(1) & = & \chi' & + \chi''\alpha' & + \chi'''\alpha'' & + \chi^{IV}\alpha''' & + \chi^{V}\alpha^{IV} & + \chi^{VI}\alpha^{V} + \chi^{VII}\alpha^{VI} \\
-w(2) & = & & \chi'' & + \chi'''\beta'' & + \chi^{IV}\beta''' & + \chi^{V}\beta^{IV} & + \chi^{VI}\beta^{V} + \chi^{VII}\beta^{VI} \\
-w(3) & = & & & \chi''' & + \chi^{IV}\gamma''' & + \chi^{V}\gamma^{IV} & + \chi^{VI}\gamma^{V} + \chi^{VII}\gamma^{VI} \\
-w(4) & = & & & & \chi^{IV} & + \chi^{V}\delta^{IV} & + \chi^{VI}\delta^{V} + \chi^{VII}\delta^{VI} \\
-w(5) & = & & & & & \chi^{V} & + \chi^{VI}\varepsilon^{V} + \chi^{VII}\varepsilon^{VI} \\
-w(6) & = & & & & & & \chi^{VI} + \chi^{VII}\zeta^{VI} \\
-w(7) & = & & & & & & \qquad\quad \chi^{VII}
\end{array}
$$

sie kürzen sich in jedem Falle nach der Zerlegung der Gleichungen in zwei Systeme bedeutend ab. In unserem Beispiel sind, wie man gesehen hat, die folgenden Grössen Null,

$$\gamma', \; \delta', \; \varepsilon', \; \zeta'$$
$$\gamma'', \; \delta'', \; \varepsilon'', \; \zeta''$$
$$\gamma''', \; \delta''', \; \varepsilon''', \; \zeta'''$$
$$\delta^{IV},$$

und alle Glieder der vorstehenden Formeln, in welchen eine dieser Grössen vorkommt, fallen daher auch weg, und ähnlich wird es sich in allen Fällen verhalten. Die folgenden Zahlenwerthe sind daher durch eine sehr kurze Rechnung erhalten worden.

$$\alpha' = +(9.32713), \; \alpha'' = +(9.55199)$$
$$\beta'' = +(9.83137)$$
$$\delta' = -(8.86970), \; \delta'' = -(9.08168)$$
$$\varepsilon' = -(8.86970), \; \varepsilon'' = -(9.08168)$$
$$\zeta'' = -(9.08168)$$

Bei der Berechnung der Werthe der $w(r)$, die hieraus folgen, ist die Reihenfolge der Richtungen, die oben angenommen wurde, zu beachten. In den vorstehenden Ausdrücken der $w(r)$ sind daher

$$w(5), \; w(6), \; w(7), \; w(1), \; w(2), \; w(3), \; w(4)$$
bez. statt $w(1), \; w(2), \; w(3), \; w(4), \; w(5), \; w(6), \; w(7)$

anzunehmen. Man erhält

$$w(1) = +0''.187$$
$$w(2) = -1.519$$
$$w(3) = +1.250$$
$$w(4) = -0.199$$
$$w(5) = -0.092$$
$$w(6) = +0.818$$
$$w(7) = +2.238$$

die vor Allem der oft erwähnten Bedingungsgleichung genügen müssen. Diese giebt

$$N \,.\, w(5) = -0''.159$$
$$N' \,.\, w(6) = 0$$
$$N'' \,.\, w(7) = 0$$
$$N_{,} \,.\, w(1) = +0.433$$
$$N_{,,} \,.\, w(2) = -3.508$$
$$N_{,,,} \,.\, w(3) = +3.847$$
$$N_{IV} \,.\, w(4) = -0.613$$
$$\text{Sa.} = 0.000$$

wie es sein muss. Die Werthe der $w(6)$ und $w(7)$ entziehen sich dieser

Prüfung nicht ganz, denn sie tragen mit dazu bei um die übrigen zu berechnen. Die Unterschiede der $w(r)$ müssen ferner mit denen, die das Verfahren des vor. Art. gegeben hat, übereinstimmen, und die Vergleichung zeigt, dass dieses in der That der Fall ist.

12.

Bei der Anwendung des im Art. 4 entwickelten Verfahrens werde ich die Reihenfolge der Richtungen so wählen wie das folgende Täfelchen zeigt.

No.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	p	P	$p^2 . P$
1	$-0''.652$	$-26''.052$	$+27''.748$	$-2''.682$	$+4''.638$	—	—	20	100	4.0
2	$+6.750$	-8.800	$+2.050$	—	—	—	—	4	12	4.3333
3	—	—	$+5.516$	-1.883	-3.633	—	—	4	12	4.3333
4	—	—	—	—	-25.927	$-4''.077$	$+30''.004$	24	72	8.0
(lx)	$+6''.098$	$-34''.852$	$+35''.314$	$-4''.565$	$-27''.922$	$-4''.077$	$+30.004$	Sa	196	
Q	24	24	28	24	48	24	24	=	196	

Das Täfelchen der (pp) steht in Folge dessen so,

	p	p'	p''	p'''	p^{iv}	$p_{,}$	$''d$
p	5.3333	5.3333	5.3333	4.0	4.0	0	0
p'		5.3333	5.3333	4.0	4.0	0	0
p''			6.6667	5.3333	5.3333	0	0
p'''				5.3333	5.3333	0	0
p^{iv}					13.3333	8.0	8.0
$p_{,}$						8.0	8.0
$p_{,,}$							8.0

und hieraus bekommt man, in Folge der Bestimmungen des Art. 4, zuerst

$$N = 2.3095\ ,\ N' = 2.3095\ ,\ N'' = 2.3095$$
$$N''' = 1.7320\ ,\ N^{iv} = 1.7320\ ,\ N^{v} = 0\ \quad ,\ N_{,} = 0$$

und wenn man vorläufig auf die Zerlegung des Systems keine Rücksicht nimmt,

$(1,1) = \quad 24.0$
$(1,l) \; = + \, 6''.098$

$(2,2,1) = \quad 24.0$
$(2,3,1) = \quad 0 \quad , \quad (3,3,2) = \quad 26.6667$
$(2,4,1) = \quad 0 \quad , \quad (3,4,2) = - \, 1.3333 \, , \quad (4,4,1) = \quad 21.6667$
$(2,5,1) = \quad 0 \quad , \quad (3,5,2) = - \, 1.3333 \, , \quad (4,5,1) = - \, 2.3333$
$(2,6,1) = \quad 0 \quad , \quad (3,6,2) = \quad 0 \quad , \quad (4,6,1) = \quad 0$
$(2,7,1) = \quad 0 \quad , \quad (3,7,2) = \quad 0 \quad , \quad (4,7,1) = \quad 0$
$(2,l,1) = - \, 34''.852 \, , \quad (3,l,2) = + 35''.314 \, , \quad (4,l,1) = - \, 4''.565$

$(5,5,1) = \quad 37.6667$
$(5,6,1) = - \, 8.0 \quad , \; (6,6,1) = \quad 16.0$
$(5,7,1) = - \, 8.0 \quad , \; (6,7,1) = - \quad 8.0 \, , \; (7,7,1) = \quad 16.0$
$(5,l,1) = -27''.922 \, , \; (6,l,1) = -4''.077 \, , \; (7,l,1) = +30''.004 \, , \; (ll) = 182.752$

oder (ll) wie oben. Hier ist es blos Zufall, dass $(2,4,1)$ und $(2,5,1)$ Null werden, welches in anderen speciellen Fällen nicht statt finden wird. Zerlegt man nun dieses System von Gleichungen nach dem Verfahren des Art. 4, so bleiben die Werthe der Coefficienten der vier ersten Gleichungen unverändert wie oben, aber für die fünfte Gleichung tritt

$$H = (5,5,1) + (5,6,1) + (5,7,1) = 21.6667 \text{ statt } (5,5,1)$$

und

$$= (5,l,1) + (6,l,1) + (7,l,1) = - \, 1''.995 \text{ statt } (5,l,1)$$

ein, womit die Coefficienten des ersten Systems von Gleichungen vollständig gegeben sind. Für die des zweiten Systems bekommt man, wenn man in Betreff der Bezeichnungen die bez. Bemerkung des vor. Art. benutzt,

$(6,6,5) = \quad 16.0$
$(6,7,5) = - \, 8.0 \quad , \; (7,7,5) = \quad 16.0$
$(6,l,5) = - \, 4''.077 \, , \; (7,l,5) = + \, 30''.004$

während der Werth von (ll) durch die Zerlegung nicht berührt wird. Die Auflösung giebt nun nach und nach

$\chi' = - \, (9.40498)$
$(ll,1) = 181.203$
$\gamma'' = 0 \, , \; \delta'' = 0 \, , \; \chi'' = + \, (0.16202)$
$(4,4,2) = (4,4,1)$
$(4,5,2) = (4,5,1) \, , \; (5,5,2) = (5,5,1)$
$(4,l,2) = (4,l,1) \, , \; (5,l,2) = (5,l,1) \, , \; (ll,2) = 130.592$

$\gamma''' = + (8.69897)$, $\delta''' = + (8.69897)$, $\chi''' = - (0.12198)$
$(4,4,3) = \quad 21.6$
$(4,5,3) = - 2.4$, $(5,5,3) = 21.6$
$(4,l,3) = - 2''.7993$, $(5,l,3) = - 0''.2293$, $(ll,3) = 83.826$
$\delta'' = + (9.04576)$, $\chi'' = + (9.11260)$
$(5,5,4) = 21.3333$
$(5,l,4) = - 0''.5403$, $(ll,4) = 83.463$
$\epsilon' = \zeta' = 0$, $\chi' = + (8.40357)$
$(ll,5) = 83.449$
$\zeta'' = + (9.69897)$, $\chi'' = + (9.40622)$
$(7,7,6) = 12.0$
$(7,l,6) = + 27''.9655$, $(ll,6) = 82.410$
$\chi'' = - (0.36744)$.
$(ll,7) = 17.238$ (wie oben)

Hieraus ferner nach den Ausdrücken der Abhandlung

$$\beta'' = 0 \; , \; \gamma'' = + (8.74476)$$

und

$$w(1) = + 0''.254$$
$$w(2) = - 1.452$$
$$w(3) = + 1.316$$
$$w(4) = - 0.133$$
$$w(5) = - 0.025$$
$$w(6) - w(5) = + 0.910$$
$$w(7) - w(5) = + 2.330$$

die auch den oft erwähnten Bedingungsgleichungen genügen. Die beiden letzten Werthe entziehen sich aber dieser Controle, weil $N_{,}$ und $N_{,,}$ Null sind. Man bekommt, wenn man $w(5)$ durch Addition seines Werthes $- 0''.025$ eliminirt

$$w(6) = + 0''.885$$
$$w(7) = + 2.305$$

und die Unterschiede aller dieser Werthe stimmen mit den bezüglichen Resultaten der beiden nächstvorhergehenden Artikel überein.

13.

Wenden wir jetzt das Verfahren des Art. 6 auf unser Beispiel an, so sind alle N Null zu machen, und in dieser Annahme zuerst die Coefficienten der Gleichungen mit Weglassung der der ersten Gleichung zu

berechnen, und dabei keine Rücksicht auf die Zerlegung zu nehmen. Benutzt man dazu das Täfelchen der (pp) des vor. Art., so sind diese Coefficienten

$(2,2,1) = 18.6667$
$(2,3,1) = -5.3333$, $(3,3,1) = 21.3333$
$(2,4,1) = -4.0$, $(3,4,1) = -5.3333$, $(4,4,1) = 18.6667$
$(2,5,1) = -4.0$, $(3,5,1) = -5.3333$, $(4,5,1) = -5.3333$
$(2,6,1) = 0$, $(3,6,1) = 0$, $(4,6,1) = 0$
$(2,7,1) = 0$, $(3,7,1) = 0$, $(4,7,1) = 0$
$(2,l,1) = -34''.852$, $(3,l,1) = +35''.314$, $(4,l,1) = -4''.565$

$(5,5,1) = 34.6667$
$(5,6,1) = -8.0$, $(6,6,1) = 16.0$
$(5,7,1) = -8.0$, $(6,7,1) = -8.0$, $(7,7,1) = 16.0$
$(5,l,1) = -27''.922$, $(6,l,1) = -4''.077$, $(7,l,1) = +30''.004$, $(ll,1) = 182.752$

Die Coefficienten der Gleichung mit dem Index 5 werden nun eben so erhalten wie im vor. Art. und es sind folglich die Coefficienten der ersten vier Gleichungen mit den vorstehenden bis auf die Ausnahme identisch, dass

$$H \text{ oder } (5,5,1) = 18.667$$
$$L \text{ oder } (5,l,1) = -1''.995$$

werden, und damit das erste System abschliesst. Die Coefficienten des zweiten Systems sind hier dieselben wie im vor. Art. nemlich

$(6,6,5) = 16.0$
$(6,7,5) = -8.0$, $(7,7,5) = 16.0$
$(6,l,5) = -4''.077$, $(7,l,5) = +30''.004$

Die Auflösung giebt hienach

$$\beta'' = +(9.45594),\ \gamma'' = +(9.33100)$$
$$\delta'' = +(9.33100),\ \chi'' = +(0.27117)$$

$(3,3,2) = 19.8094$
$(3,4,2) = -6.4762$, $(4,4,2) = 17.8095$
$(3,5,2) = -6.4762$, $(4,5,2) = -6.1905$, $(5,5,2) = 17.8095$
$(3,l,2) = +25''.3560$, $(4,l,2) = -12''.0335$, $(5,l,2) = -9.4635$, $(ll,2) = 117.679$

$$\gamma''' = +(9.51445),\ \delta''' = +(9.51445),\ \chi''' = -(0.10721)$$

$(4,4,3) = 15.6923$
$(4,5,3) = -8.3077$, $(5,5,3) = 15.6923$
$(4,l,3) = -3''.7439$, $(5,l,3) = -1''.1739$, $(ll,3) = 85.223$

$$\delta'' = +\,(9.72380)\,,\ \chi'' = +\,(0.37765)$$

$$(5,5,4) = \quad 11.2941$$

$$(5,l,4) = -3''.1560\,,\ (ll,4) = 84.330$$

$$\chi' = +\,(9.44630)$$

$$(ll,5) = 83.448$$

$$\zeta' = +\,(9.69897)\,,\ \chi'' = +\,(9.40622)$$

$$(7,7,6) = \quad 12.0$$

$$(7,l,6) = +27''.9655\,,\ (ll,6) = 82.409$$

$$\chi''' = -\,(0.36744)$$

$$(ll,7) = 17.237 \text{ (wie oben)}$$

Ferner nach den Ausdrücken der Abhandlung

$$\delta'' = +\,(9.48813)\,,\ \beta'' = +\,(9.67265)\,,\ \gamma'' = +\,(9.69897)$$

und hiemit

$$\begin{aligned} w(2) - w(1) &= -1''.706 \\ w(3) - w(1) &= +\ 1.062 \\ w(4) - w(1) &= -\ 0.387 \\ w(5) - w(1) &= -\ 0.279 \\ w(6) - w(5) &= +\ 0.910 \\ w(7) - w(5) &= +\ 2.330 \end{aligned}$$

Die im Vorhergehenden zur Prüfung dieser Endwerthe angewandte Bedingungsgleichung ist hier nicht anwendbar, da sie identisch erfüllt wird. Die Vergleichung mit den im Vorhergehenden erhaltenen Werthen zeigt die Uebereinstimmung.

14.

Da das Verfahren des vor. Art. mit demjenigen übereinstimmt, welches in dem mehrmals genannten Werke über die Preuss. Landestriangulation angewandt worden ist, und dort nach Bessel die an sich überflüssige unbestimmte Elimination der Gleichungen ausgeführt worden ist, so halte ich es für nicht überflüssig zu zeigen, dass die Coefficienten dieser Elimination dort auch richtig berechnet worden sind. Bezeichnet man diese Coefficienten mit $[2,2]$, $[2,3]$, etc., so sind sie im gegenwärtigen Falle durch die folgenden Ausdrücke gegeben,

$$[2,2] = \frac{1}{(2,2,1)} + \frac{\beta''^2}{(3,3,2)} + \frac{\beta'''^2}{(4,4,3)} + \frac{\beta^{IV2}}{(5,5,4)}$$

$$[2,3] = \frac{\beta''}{(3,3,2)} + \frac{\beta'''\gamma'''}{(4,4,3)} + \frac{\beta^{IV}\gamma^{IV}}{(5,5,4)}$$

$$[2,4] = \frac{\beta'''}{(4,4,3)} + \frac{\beta^{IV}\delta^{IV}}{(5,5,4)}$$

$$[2,5] = \frac{\beta^{IV}}{(5,5,4)}$$

$$[2,6] = [2,7] = 0$$

$$[3,3] = \frac{1}{(3,3,2)} + \frac{\gamma'''^2}{(4,4,3)} + \frac{\gamma^{IV2}}{(5,5,4)}$$

$$[3,4] = \frac{\gamma'''}{(4,4,3)} + \frac{\gamma^{IV}\delta^{IV}}{(5,5,4)}$$

$$[3,5] = \frac{\gamma^{IV}}{(5,5,4)}$$

$$[3,6] = [3,7] = 0$$

$$[4,4] = \frac{1}{(4,4,3)} + \frac{\delta^{IV2}}{(5,5,4)}$$

$$[4,5] = \frac{\delta^{IV}}{(5,5,4)}$$

$$[4,6] = [4,7] = 0$$

$$[5,5] = \frac{1}{(5,5,4)}$$

$$[5,6] = [5,7] = 0$$

$$[6,6] = \frac{1}{(6,6,5)} + \frac{\zeta'^2}{(7,7,6)}$$

$$[6,7] = \frac{\zeta'}{(7,7,6)}$$

$$[7,7] = \frac{1}{(7,7,6)}$$

Die Substitution der numerischen Werthe des vor. Art. in diese Ausdrücke gab

$[2,2] = 0.08333$

$[2,3] = 0.04167$, $[3,3] = 0.07943$

$[2,4] = 0.04167$, $[3,4] = 0.04427$, $[4,4] = 0.08854$

$[2,5] = 0.04167$, $[3,5] = 0.04427$, $[4,5] = 0.04688$

$[5,5] = 0.08854$, $[6,6] = 0.08333$

$[6,7] = 0.04167$, $[7,7] = 0.08333$

die auch mit den Angaben des angezogenen Werks übereinstimmen.

15.

Wenden wir endlich auch das Verfahren des Art. 7 auf unser Beispiel an, so ist wieder das Täfelchen der (pp) des Art. 12 zu benutzen, und es sind hiebei wieder alle N Null zu machen, aber die fünfte Glei-

chung wegzulassen. Die Coefficienten des ersten Systems der hiemit schon in zwei Systeme zerlegten Gleichungen sind nun die folgenden,

$$(1,1) = 18.6667$$
$$(1,2) = -5.3333\,,\ (2,2) = 18.6667$$
$$(1,3) = -5.3333\,,\ (2,3) = -5.3333\,,\ (3,3) = 21.3333$$
$$(1,4) = -4.0\,,\ (2,4) = -4.0\,,\ (3,4) = -5.3333$$
$$(1,l) = +6''.098\,,\ (2,l) = -34''.852\,,\ (3,l) = +35''.314$$
$$(4,4) = 18.6667$$
$$(4,l) = -4''.565\,,\ (ll) = 182.752$$

und die Coefficienten des zweiten Systems sind dieselben, wie im Art. 13, weshalb ich sie nicht wiederholen werde. Die Auflösung giebt jetzt

$$\alpha' = +(9.45594)\,,\ \beta' = +(9.45594)$$
$$\gamma' = +(9.33100)\,,\ \chi' = -(9.51413)$$

$$(2,2,1) = 17.1428$$
$$(2,3,1) = -6.8572,\ (3,3,1) = 19.8094$$
$$(2,4,1) = -5.1429,\ (3,4,1) = -6.4762,\ (4,4,1) = 17.8095$$
$$(2,l,1) = -33''.1097,\ (3,l,1) = +37''.0563,\ (4,l,1) = -3''.2583,\ (ll,1) = 180.76$$
$$\beta'' = +(9.60206)\,,\ \gamma'' = +(9.47713)\,,\ \chi'' = +(0.28588)$$
$$(3,3,2) = 17.0667$$
$$(3,4,2) = -8.5334\,,\ (4,4,2) = 16.2666$$
$$(3,l,2) = +23''.8124\,,\ (4,l,2) = -13''.1916\,,\ (ll,2) = 116.810$$
$$\gamma''' = +(9.69897)\,,\ \chi''' = -(0.14464)$$
$$(4,4,3) = 12.0000$$
$$(4,l,3) = -1''.2855\,,\ (ll,3) = 83.586$$
$$\chi'''' = +(9.02989)$$
$$(ll,4) = (ll,5) = 83.448$$

Da dieser Werth von $(ll,5)$ mit dem im Art. 13 gefundenen übereinstimmt, so muss der hier sich für $(ll,7)$ ergebende auch mit jenem übereinstimmen.

Die Ausdrücke der Abhandlung geben ferner

$$\alpha'' = +(9.60206)\,,\ \alpha''' = +(9.69897)\,,\ \beta''' = +(9.69897)$$

und hiemit

$$w(1) - w(5) = +0''.279$$
$$w(2) - w(5) = -1.427$$
$$w(3) - w(5) = +1.342$$
$$w(4) - w(5) = -0\ 107$$

während $w(6) - w(5)$ und $w(7) - w(5)$ eben so bleiben wie im vorvor. Art. Die Anwendung der Bedingungsgleichung findet hier wieder nicht statt, weil sie wieder identisch wird. Durch die Subtraction des ersten der vorstehenden Ausdrücke von allen übrigen bekommt man

$$w(2) - w(1) = -1''.706$$
$$w(3) - w(1) = +1.063$$
$$w(4) - w(1) = -0.386$$
$$w(5) - w(1) = -0.279$$

die mit den im Vorhergehenden gefundenen Werthen übereinstimmen.

16.

Im Vorhergehenden ist zur Gnüge gezeigt worden, dass die Zerlegung der Stationsgleichungen in zwei Systeme, wo dieses an sich möglich ist, in den Resultaten der Ausgleichungen auf den Stationen durchaus keine Verschiedenheiten in den ausgeglichenen Werthen der Winkel hervorbringt. Aber nicht blos in diesem ersten Theil der Auflösung werden die Resultate identisch, sondern dasselbe findet auch im zweiten Theile derselben statt, so dass man überhaupt identische Endresultate erhält, man mag die Zerlegung angewandt haben oder nicht. Jeder, der sich die Mühe giebt, die Theorie dieser Aufgabe etwas mehr wie oberflächlich zu betrachten, wird sich leicht überzeugen können, dass dieses in der That statt finden muss. Ich könnte daher diesen Aufsatz hier schliessen, um aber diese Sache möglichst klar zu machen, will ich dasselbe Beispiel mit allen fünf verschiedenen Verfahrungsarten, die im Vorhergehenden enthalten sind, so weit fortsetzen, wie die Betrachtung einer einzigen Station erlaubt; ich werde mich hiebei indess nur der Logarithmen von vier Decimalen bedienen, da man in der Regel damit ausreicht.

Geht man die in dem oft genannten Werke angegebenen Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes durch, zu welchem die hier behandelte Station gehört, so findet man dass diese letztere nur in denjenigen derselben vorkommt, die mit den Zahlen *IX, X, XII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX, XXII* bezeichnet sind. Zieht man diese aus, und ergänzt die erste Richtung, deren Verbesserung dem Bessel-schen Verfahren zufolge weggelassen worden ist, so erhält man das folgende Täfelchen der Differentialquotienten, bei welchen es überflüssig

war eine Stationsnummer anzuführen, da es sich hier nur um Eine Station handelt.

r	q(r,IX)	log q(r,X)	log q(r,XII)	q(r,XIV)	log q(r,XV)	q(r,XVI)
1	— 1	0.2071n	—	—	—	—
2	+ 1	0.4239	9.6930n	— 1	—	—
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—
4	—	—	9.7405n	—	0.2931	—
5	—	—	—	+ 1	9.2205n	— 1
6	—	—	—	—	—	+ 1
7	—	—	—	—	—	—

r	log q(r,XVII)	q(r,XVIII)	log q(r,XIX)	q(r,XX)	log q(r,XXII)
1	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—
4	0.2931n	—	—	—	—
5	0.5630	+ 1	0.2284n	—	—
6	0.2284n	— 1	0.2284	— 1	9.7080
7	—	—	—	+ 1	9.7080n

17.

Wendet man nun zuerst das allgemeine Verfahren ohne Zerlegung der Gleichungen an, nach welchem im Art. 10 die Ausgleichung auf der Station ausgeführt wurde, so sind die in Betracht kommenden Hülfsgrössen die folgenden,

$$\beta''' = -(8.8697),\ \beta'' = -(9.0817),\ \beta' = -(9.5673),\ \beta'' = -(9.6698)$$
$$\gamma''' = -(8.8697),\ \gamma'' = -(9.0817),\ \gamma' = -(9.5673),\ \gamma'' = -(9.6698)$$
$$\delta'' = -(9.0817),\ \delta' = -(9.5673),\ \delta'' = -(9.6698)$$
$$\varepsilon' = -(9.5673),\ \varepsilon'' = -(9.6698)$$
$$\zeta' = +(9.4252)$$

(1,1) = (1.5760) , (5,5,4) = (1.4297)
(2,2,1) = (1.3802) , (6,6,5) = (1.2777)
(3,3,2) = (1.3802) , (7,7,6) = (1.2460)
(4,4,3) = (1.4850)

und es ist hiebei zu beachten, dass hier die Reihenfolge der Richtungen (5), (1), (2), (3), (4), (6), (7) ist. Man kann immerhin demungeachtet das Täfelchen der q des vor. Art. so wie es aufgestellt worden ist, anwenden, wenn man nur die vorbenannte Reihenfolge beachtet, allein um Irrthümern möglichst vorzubeugen, verfährt man sicherer, wenn man dieses Täfelchen nach der geänderten Reihenfolge umschreibt. Es steht daher für die jetzige Anwendung wie folgt.

r	q(r, IX)	log q(r, X)	log q(r, XII)	q(r, XIV)	log q(r, XV)	q(r, XVI)	
5	—	—	—	+ 1	9.2205n	— 1	1
1	— 1	0.2071n	—	—	—	—	2
2	+ 1	0.4239	9.6930n	— 1	—	—	3
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—	4
4	—	—	9.7405n	—	0.2934	—	5
6	—	—	—	—	—	+ 1	6
7	—	—	—	—	—	—	7

r	log q(r, XVII)	q(r, XVIII)	log q(r, XIX)	q(r, XX)	log q(r, XXII)	
5	0.5630	+ 1	0.2284n	—	—	1
1	—	—	—	—	—	2
2	—	—	—	—	—	3
3	—	—	—	—	—	4
4	0.2934n	—	—	—	—	5
6	0.2284n	— 1	0.2284	— 1	9.7080	6
7	—	—	—	+ 1	9.7080n	7

Die Ausdrücke der Abhandlung, für welche die rechter Hand angesetzten Indices zu benutzen sind, geben nun die folgenden Werthe der Hülfsgrössen,

r	log η(r, IX)	log η(r, X)	log η(r, XII)	log η(r, XIV)	log η(r, XV)	log η(r, XVI)	
5	—	—	—	0.	9.2205n	0. n	1
1	0. n	0.2071n	—	—	—	—	2
2	0.	0.4239	9.6930n	0. n	—	—	3
3	—	0.0495n	0.0344	8.8697	0.2547n	—	4
4	—	—	9.7900n	9.0847	0.3387	—	5
6	—	—	—	9.5673	8.7889n	0.	6
7	—	—	—	9.6698	8.8940n	9.4252	7

r	log η(r, XVII)	log η(r, XVIII)	log η(r, XIX)	log η(r, XX)	log η(r, XXII)	
5	0.5630	0.	0.2284n	—	—	1
1	—	—	—	—	—	2
2	—	—	—	—	—	3
3	—	—	—	—	—	4
4	0.2934n	—	—	—	—	5
6	9.9854n	0. n	0.2284	0. n	9.7080	6
7	9.6700	9.4252n	9.6536	9.8656	9.5735n	7

r	log Q(r, IX)	log Q(r, X)	log Q(r, XII)	log Q(r, XIV)	log Q(r, XV)	log Q(r, XVI)	
5	—	—	—	8.4240	7.6445n	8.4240n	1
1	8.6498n	8.8269n	—	—	—	—	2
2	8.6498	9.0437	8.3128n	8.6498n	—	—	3
3	—	8.5645n	8.5484	7.3847	8.7697n	—	4
4	—	—	8.3603n	7.6520	8.9090	—	5
6	—	—	—	8.2896	7.5442n	8.7223	6
7	—	—	—	8.4238	7.6450n	8.4792	7

r	$\log Q(r,XVII)$	$\log Q(r,XVIII)$	$\log Q(r,XIX)$	$\log Q(r,XX)$	$\log Q(r,XXII)$	
5	8.9870	8.4240	8.6524n	—	—	1
1	—	—	—	—	—	2
2	—	—	—	—	—	3
3	—	—	—	—	—	4
4	8.8634n	—	—	—	—	5
6	8.7077n	8.7223n	8.9507	8.7223n	.8.4303	6
7	8.4240	8.4792n	8.4076	8.6196	8.3275n	7

r	$\log f(r,IX)$	$\log f(r,X)$	$\log f(r,XII)$	$\log f(r,XIV)$	$\log f(r,XV)$	$\log f(r,XVI)$	
5	—	—	—	8.4240	7.6445n	8.4240n	1
1	8.6198n	8.8090n	6.4703	8.3079n	7.3357n	8.4239n	2
2	8.6198	9.0544	8.3096n	8.7923n	7.3357n	8.4239n	3
3	—	8.5645n	8.5844	8.2483n	8.8153n	8.4239n	4
4	—	—	8.3603n	8.4793n	8.9261	8.4239n	5
6	—	—	—	8.4239	7.6454n	8.7542	6
7	—	—	—	8.4238	7.6450n	8.4792	7

r	$\log f(r,XVII)$	$\log f(r,XVIII)$	$\log f(r,XIX)$	$\log f(r,XX)$	$\log f(r,XXII)$	
5	8.9870	8.4240	8.6524n	—	—	1
1	8.4830	8.4239	8.6523n	—	—	2
2	8.4830	8.4239	8.6523n	—	—	3
3	8.4830	8.4239	8.6523n	—	—	4
4	8.8234n	8.4239	8.6523n	—	—	5
6	8.6429n	8.7542n	8.9826	8.6198n	8.3276	6
7	8.4240	8.4792n	8.4076	8.6498	8.3275n	7

Man kann die Richtigkeit dieser Werthe der f Functionen durch das Corollarium zu dem im Suppl. 3 bewiesenen Satze prüfen. Wir erhalten hier z. B.

$$N.f(5,XIV)=+0.0460$$

$$N'.f(1,X)=-0.1488,\quad N'.f(1,XII)=+0.0003\quad N'.f(1,XIV)=-0.0469$$

$$N''.f(2,X)=+0.2618,\quad N''.f(2,XII)=-0.0471\quad N''.f(2,XIV)=-0.1432$$

$$N'''.f(3,X)=-0.1130,\quad N'''.f(3,XII)=+0.1173\quad N'''.f(3,XIV)=-0.0545$$

$$\text{Sa.}=0.0000,\quad N''.f(4,XII)=-0.0706\quad N''.f(4,XIV)=-0.0465$$

$$\text{Sa.}=-0.0001\quad N'.f(6,XIV)=+0.1226$$

$$N''.f(7,XIV)=+0.1226$$

$$\text{Sa.}=+0.0001$$

u. s. w.

18.

Aus den vorstehenden Zahlenwerthen ergiebt sich der Beitrag, den die in Rede stehende Station zu den Coefficienten der Endgleichungen liefert. Ich habe diesen in der folgenden Tafel zusammengestellt, und dabei zugleich die einzelnen Theile, aus welchen er besteht, hinzugefügt.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)	(IX,XV)	(IX,XVI)
1	0.04367	+ 0.0644	−0.00015	+0.02032	+0.00217	+0.02654
2	0.04167	+ 0.1133	−0.02040	−0.06199	−0.00217	−0.02654
	0.08334	+ 0.1777	−0.02055	−0.04167	0.	0.
r	(IX,XVII)	(IX,XVIII)	(IX,XIX)	(IX,XX)	(IX,XXII)	
1	−0.01524	−0.02654	+0.04491	0.	0.	
2	+0.01524	+0.02654	−0.04491	0.	0.	
	0.	0.	0.			
r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)	(X,XVI)	(X,XVII)
1	0.1038	−0.00024	+0.0327	+0.00349	+0.04276	−0.02455
2	0.3008	−0.05415	−0.1645	−0.00575	−0.07043	+0.04045
3	0.0383	−0.03977	+0.0185	+0.06820	+0.02769	−0.01590
	0.4429	−0.09416	−0.1133	+0.06594	+0.00002	0.00000
r	(X,XVIII)	(X,XIX)	(X,XX)	(X,XXII)		
1	−0.04276	+0.0724	0.	0.		
2	+0.07043	−0.1192	0.	0.		
3	−0.02769	+0.0469	0.	0.		
	−0.00002	+0.0001				
r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVI)	(XII,XVII)	(XII,XVIII)
2	0.03006	+0.03057	+0.00107	+0.01309	−0.00752	−0.01309
3	0.03978	−0.01848	−0.06820	−0.02769	+0.01590	+0.02769
4	0.01261	+0.00832	−0.04641	+0.01460	+0.03663	−0.01460
	0.06245	+0.02041	−0.11354	0.00000	+0.04501	0.00000
r	(XII,XIX)	(XII,XX)	(XII,XXII)			
2	+0.02215	0.	0.			
3	−0.04686	0.	0.			
4	+0.02471	0.	0.			
	0.00000					
r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVI)	(XIV,XVII)	(XIV,XVIII)	(XIV,XIX)
5	0.02655	−0.00443	−0.02655	+0.09705	+0.02655	−0.04492
2	0.06199	+0.00217	+0.02655	−0.01524	−0.02655	+0.04492
	0.08854	−0.00224	0.	+0.08181	0.	0.
r	(XIV,XX)	(XIV,XXII)				
5	0.	0.				
2	0.	0.				

r	(XV,XV)	(XV,XVI)	(XV,XVII)	(XV,XVIII)	(XV,XIX)	(XV,XX)
5	0.0007	+0.00441	−0.0163	−0.00441	+0.00746	0.
3	0.1175	+0.04771	−0.0274	−0.04771	+0.08072	0.
4	0.1656	−0.05212	−0.1308	+0.05212	−0.08818	0.
	0.2838	0.00000	−0.1743	0.00000	0.00000	
r	(XV,XXII)					
5	0.					
3	0.					
4	0.					
r	(XVI,XVI)	(XVI,XVII)	(XVI,XVIII)	(XVI,XIX)	(XVI,XX)	(XVI,XXII)
5	0.02655	−0.09705	−0.02655	+0.04492	0.	0.
6	0.05679	−0.04394	−0.05679	+0.09608	−0.04167	+0.02126
	0.08334	−0.14099	−0.08334	+0.14100	−0.04167	+0.02126
r	(XVII,XVII)	(XVII,XVIII)	(XVII,XIX)	(XVII,XX)	(XVII,XXII)	
5	0.3548	+0.09705	−0.1642	0.	0.	
4	0.1311	−0.05212	+0.0882	0.	0.	
6	0.0743	+0.09608	−0.1626	+0.07050	−0.03598	
	0.5602	+0.14101	−0.2386	+0.07050	−0.03598	
r	(XVIII,XVIII)	(XVIII,XIX)	(XVIII,XX)	(XVIII,XXII)		
5	0.02655	−0.04492	0.	0.		
6	0.05679	−0.09608	+0.04167	−0.02126		
	0.08334	−0.14100	+0.04167	−0.02126		
r	(XIX,XIX)	(XIX,XX)	(XIX,XXII)			
5	0.0760	0.	0.			
6	0.1626	−0.07050	+0.03598			
	0.2386	−0.07050	+0.03598			
r	(XX,XX)	(XX,XXII)				
6	0.04167	−0.02126				
7	0.04167	−0.02126				
	0.08334	−0.04252				
r	(XXII,XXII)					
6	0.01086					
7	0.01086					
	0.02172					

Weiter kann man in der Betrachtung einer einzelnen Station nicht gehen, aber das Vorstehende reicht aus, um ihre volle Einwirkung auf die ganze Berechnung des betreffenden Dreiecksnetzes zu erkennen, und

mit den Resultaten der übrigen hier erklärten Verfahrungsarten vergleichen zu können.

19.

Indem wir nun zur Fortsetzung der Rechnungen übergehen, die sich an das im Art. 11 angewandte Verfahren der Zerlegung der Stationsgleichungen anknüpfen, haben wir zuerst zu erwägen, dass dort die Reihenfolge der Richtungen eine andere ist, wie im Vorhergehenden. Dieser Umstand muss wieder bei der Benutzung des Täfelchens für die Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen berücksichtigt werden, und stellt man dieses demgemäss um, so erhält man das folgende.

r	$q(r,IX)$	$\log q(r,X)$	$\log q(r,XII)$	$q(r,XIV)$	$\log q(r,XV)$	$q(r,XVI)$	
5	—	—	—	+1	9.2205n	−1	1
6	—	—	—	—	—	+1	2
7	—	—	—	—	—	—	3
1	−1	0.2071n	—	—	—	—	4
2	+1	0.4239	9.6930n	−1	—	—	5
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—	6
4	—	—	9.7405n	—	0.2931	—	7

r	$\log q(r,XVII)$	$q(r,XVIII)$	$\log q(r,XIX)$	$q(r,XX)$	$\log q(r,XXII)$	
5	0.5630	+1	0.2284n	—	—	1
6	0.2284n	−1	0.2284	−1	9.7080	2
7	—	—	—	+1	9.7080n	3
1	—	—	—	—	—	4
2	—	—	—	—	—	5
3	—	—	—	—	—	6
4	0.2931n	—	—	—	—	7

Die Werthe der jetzt in Betracht kommenden Hülfsgrössen sind zufolge des Art. 11.

$$\alpha'=+(9.3271),\ \alpha''=+(9.5520),\ \alpha'''=0,\ \alpha^{iv}=0,\ \alpha^{v}=0\quad,\ \alpha^{vi}=0$$
$$\beta''=+(9.8314),\ \beta'''=0,\ \beta^{iv}=0,\ \beta^{v}=0\quad,\ \beta^{vi}=0$$
$$\gamma'''=0,\ \gamma^{iv}=0,\ \gamma^{v}=0\quad,\ \gamma^{vi}=0$$
$$\delta^{iv}=0,\ \delta^{v}=-(8.8697),\ \delta^{vi}=-(9.0817)$$
$$\varepsilon^{v}=-(8.8697),\ \varepsilon^{vi}=-(9.0817)$$
$$\zeta^{vi}=-(9.0817)$$

$$(1,1)=(1.5760)\ ,\ (5,5,4)=(1.3802)$$
$$(2,2,1)=(1.1554)\ ,\ (6,6,5)=(1.4850)$$
$$(3,3,2)=(0.8878)\ ,\ (7,7,6)=(1.4297)$$
$$(4,4,3)=(1.3802)$$

Da beim gegenwärtigen Verfahren in verschiedenen Fällen verschiedene Hülfsgrössen Null werden können, so will ich die Formeln, nach welchen die Rechnungen auszuführen sind, ohne jede Abkürzung für sieben Richtungen aufstellen, gleichwie dieses im Art. 11 für die dort in Betracht kommenden Grössen geschehen ist.

$$\eta(1,I)= q(1,I)$$
$$\eta(2,I)= \alpha'.q(1,I)+ q(2,I)$$
$$\eta(3,I)= \alpha''.q(1,I)+\beta'.q(2,I)+ q(3,I)$$
$$\eta(4,I)= \alpha'''.q(1,I)+\beta''.q(2,I)+\gamma'.q(3,I)+ q(4,I)$$
$$\eta(5,I)= \alpha^{IV}.q(1,I)+\beta'''.q(2,I)+\gamma''.q(3,I)+\delta'.q(4,I)+ q(5,I)$$
$$\eta(6,I)= \alpha^{V}.q(1,I)+\beta^{IV}.q(2,I)+\gamma'''.q(3,I)+\delta''.q(4,I)+\varepsilon'.q(5,I)+ q(6,I)$$
$$\eta(7,I)= \alpha^{VI}.q(1,I)+\beta^{V}.q(2,I)+\gamma^{IV}.q(3,I)+\delta'''.q(4,I)+\varepsilon''.q(5,I)+\zeta'.q(6,I)+q(7,I)$$
$$Q(1,I)=\frac{\eta(1,I)}{(1,1)},\quad Q(2,I)=\frac{\eta(2,I)}{(2,2,1)},\quad Q(3,I)=\frac{\eta(3,I)}{(3,3,2)},\ \text{etc.}$$
$$f(1,I)= Q(1,I)+\alpha'.Q(2,I)+\alpha''.Q(3,I)+\alpha'''.Q(4,I)+\alpha^{IV}.Q(5,I)+\alpha^{V}.Q(6,I)+\alpha^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(2,I)= Q(2,I)+\beta'.Q(3,I)+\beta''.Q(4,I)+\beta'''.Q(5,I)+\beta^{IV}.Q(6,I)+\beta^{V}.Q(7,I)$$
$$f(3,I)= Q(3,I)+\gamma'.Q(4,I)+\gamma''.Q(5,I)+\gamma'''.Q(6,I)+\gamma^{IV}.Q(7,I)$$
$$f(4,I)= Q(4,I)+\delta'.Q(5,I)+\delta''.Q(6,I)+\delta'''.Q(7,I)$$
$$f(5,I)= Q(5,I)+\varepsilon'.Q(6,I)+\varepsilon''.Q(7,I)$$
$$f(6,I)= Q(6,I)+\zeta'.Q(7,I)$$
$$f(7,I)= Q(7,I)$$

Man bekommt hiemit für das Beispiel sehr leicht

r	$\log\eta(r,IX)$	$\log\eta(r,X)$	$\log\eta(r,XII)$	$\log\eta(r,XIV)$	$\log\eta(r,XV)$	$\log\eta(r,XVI)$	
5	—	—	—	0.	9.2205n	0. n	1
6	—	—	—	9.3274	8.5476n	9.8963	2
7	—	—	—	9.5520	8.7725n	9.5078	3
1	0. n	0.2074n	—	—	—	—	4
2	0.	0.4239	9.6930n	0. n	—	—	5
3	—	0.0496n	0.0338	8.8697	0.2547n	—	6
4	—	6.602n	9.7900n	9.0847	0.3387	—	7

r	$\log\eta(r,XVII)$	$\log\eta(r,XVIII)$	$\log\eta(r,XIX)$	$\log\eta(r,XX)$	$\log\eta(r,XXII)$	
5	0.5630	0.	0.2284n	—	—	1
6	9.9639n	9.8963n	0.4249	0. n	9.7080	2
7	9.4920	9.5078n	9.7360	9.5073	9.2156n	3
1	—	—	—	—	—	4
2	—	—	—	—	—	5
3	—	—	—	—	—	6
4	0.2934n	—	—	—	—	7

r	log Q(r,IX)	log Q(r,X)	log Q(r,XII)	log Q(r,XIV)	log Q(r,XV)	log Q(r,XVI)	
5	—	—	—	8.4240	7.6445n	8.4240n	1
6	—	—	—	8.4717	7.3922n	8.7409	2
7	—	—	—	8.6642	7.8847n	8.6200	3
1	8.6198n	8.8269n	—	—	—	—	4
2	8.6198	9.0437	8.3128n	8.6198n	—	—	5
3	—	8.5646n	8.5488	7.3847	8.7697n	—	6
4	—	5.172 n	8.3603n	7.6520	8.9090	—	7

r	log Q(r,XVII)	log Q(r,XVIII)	log Q(r,XIX)	log Q(r,XX)	log Q(r,XXII)	
5	8.9870	8.4240	8.6524n	—	—	1
6	8.8065n	8.7409n	8.9695	8.8446n	8.5526	2
7	8.3042	8.6200n	8.8482	8.6195	8.3278n	3
1	—	—	—	—	—	4
2	—	—	—	—	—	5
3	—	—	—	—	—	6
4	8.8634n	—	—	—	—	7

r	log f(r,IX)	log f(r,X)	log f(r,XII)	log f(r,XIV)	log f(r,XV)	log f(r,XVI)	
5	—	—	—	8.6641	7.8847n	—	1
6	—	—	—	8.6644	7.8847n	8.9208	2
7	—	—	—	8.6642	7.8847n	8.6200	3
1	8.6198n	8.8090n	6.461	6.8580n	7.7347n	—	4
2	8.6198	9.0542	8.3096n	8.6273n	7.7347n	—	5
3	—	8.5646n	8.5835	7.2751	8.8366n	—	6
4	—	5.172 n	8.3603n	7.6520	8.9090	—	7

r	log f(r,XVII)	log f(r,XVIII)	log f(r,XIX)	log f(r,XX)	log f(r,XXII)	
5	8.9573	—	—	—	—	1
6	8.7023n	8.9208n	9.1493	8.6198n	8.3276	2
7	8.3042	8.6200n	8.8482	8.6195	8.4278n	3
1	7.9451	—	—	—	—	4
2	7.9451	—	—	—	—	5
3	7.9451	—	—	—	—	6
4	8.8634n	—	—	—	—	7

Auch diese f Functionen kann man auf dieselbe Weise controliren wie oben, und es erstreckt sich die Wirkung davon auch auf die zu $r(6)$ und $r(7)$ gehörigen Functionen, obgleich N' und N'' Null sind. Die ersten Controlrechnungen stehen wie folgt

$$N.f(5,XIV) = +0.07994$$

$$N_{,}.f(1,X) = -0.1487,\quad N_{,}.f(1,XII) = +0.0003,\quad N_{,}.f(1,XIV) = -0.00167$$

$$N_{,,}.f(2,X) = +0.2617,\quad N_{,,}.f(2,XII) = -0.0471,\quad N_{,,}.f(2,XIV) = -0.09790$$

$$N_{,,,}.f(3,X) = -0.1130,\quad N_{,,,}.f(3,XII) = +0.1174,\quad N_{,,,}.f(3,XIV) = +0.00580$$

$$N_{,v}.f(4,X) = 0.0000,\quad N_{,v}.f(4,XII) = -0.0706,\quad N_{,v}.f(4,XIV) = +0.01382$$

Sa. = 0.0000 Sa. = 0.0000 Sa. = −0.00001

20.

Der Beitrag, den die in Rede stehende Station jetzt zu den Coefficienten der Endgleichungen liefert, ist der folgende.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)	(IX,XV)	(IX,XVI)
1	0.04167	+0.0644	−0.00015	+0.00072	+0.00543	0.
2	0.04167	+0.1133	−0.02040	−0.04239	−0.00543	0.
	0.08334	+0.1777	−0.02055	−0.04167	0.	

r	(IX,XVII)	(IX,XVIII)	(IX,XIX)	(IX,XX)	(IX,XXII)	
1	−0.00881	0.	0.	0.	0.	
2	+0.00881	0.	0.	0.	0.	
	0.					

r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)	(X,XVI)	(X,XVII)
1	0.1038	−0.00023	+0.0012	+0.00874	0.	−0.01420
2	0.3007	−0.05414	−0.1125	−0.01441	0.	+0.02339
3	0.0383	−0.03981	−0.0020	+0.07162	0.	−0.00920
	0.4428	−0.09418	−0.1133	+0.06595		−0.00001

r	(X,XVIII)	(X,XIX)	(X,XX)	(X,XXII)		
1	0.	0.	0.	0.		
2	0.	0.	0.	0.		
3	0.	0.	0.	0.		

r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVI)	(XII,XVII)	(XII,XVIII)
2	0.01006	+0.02091	+0.00268	0.	−0.00435	0.
3	0.03980	+0.00197	−0.07163	0.	+0.00920	0.
4	0.01261	−0.00247	−0.04462	0.	+0.04017	0.
	0.06247	+0.02041	−0.11357		+0.04502	

r	(XII,XIX)	(XII,XX)	(XII,XXII)			
2	0.	0.	0.			
3	0.	0.	0.			
4	0.	0.	0.			

r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVI)	(XIV,XVII)	(XIV,XVIII)	(XIV,XIX)
5	0.04614	−0.00767	0.	+0.09064	0.	0.
2	0.04239	+0.00543	0.	−0.00881	0.	0.
	0.08853	−0.00224		+0.08183		

r	(XIV,XX)	(XIV,XXII)				
5	0.	0.				
2	0.	0.				

r	(XV,XV)	(XV,XVI)	(XV,XVII)	(XV,XVIII)	(XV,XIX)	(XV,XX)
5	0.0013	0.	−0.0151	0.	0.	0.
3	0.1234	0.	−0.0158	0.	0.	0.
1	0.1593	0.	−0.1434	0.	0.	0.
	0.2840		−0.1743			
r	(XV,XXII)					
5	0.					
3	0.					
1	0.					
r	(XVI,XVI)	(XVI,XVII)	(XVI,XVIII)	(XVI,XIX)	(XVI,XX)	(XVI,XXII)
5	0.	−0.09064	0.	0.	0.	0.
6	0.08333	−0.05038	−0.08333	+0.1410	−0.04167	+0.02126
	0.08333	−0.14102	−0 08333	+0.1410	−0.04167	+0.02126
r	(XVII,XVII)	(XVII,XVIII)	(XVII,XIX)	(XVII,XX)	(XVII,XXII)	
5	0.3314	0.	0.	0.	0.	
6	0.0853	+0.1410	−0.2386	+0.07050	−0.03598	
1	0.1434	0.	0.	0.	0.	
	0.5601	+0.1410	−0.2386	+0.07050	−0.03598	
r	(XVIII,XVIII)	(XVIII,XIX)	(XVIII,XX)	(XVIII,XXII)		
6	0.08333	−0.1410	+0.04167	−0.02126		
r	(XIX,XIX)	(XIX,XX)	(XIX,XXII)			
6	0.2386	−0.07050	+0.03598			
r	(XX,XX)	(XX,XXII)				
6	0.04167	−0.02126				
7	0.04165	−0.02125				
	0.08332	−0.04251				
r	(XXII,XXII)					
6	0.01086					
7	0.01086					
	0.02172					

Vergleicht man die vorstehenden Werthe der Coefficienten mit denen des Art. 18, die ohne die Zerlegung der Stationsgleichungen erhalten worden sind, so wird man eine so vollständige Uebereinstimmung finden, wie die angewandten Logarithmen erlauben, obgleich die einzelnen Glieder, aus welchen jeder Coefficient besteht, oftmals sehr von einander verschieden sind. Die Anwendung der Zerlegung der Stations-

gleichungen führt also auf dieselben Endgleichungen, die man bekommt, wenn man diese Zerlegung nicht anwendet. Die Werthe der Unbekannten dieser Gleichungen, die in der Abhandlung mit (I), (II), (III), etc. bezeichnet wurden, sind also in beiden Fällen dieselben.

21.

Um die Vergleichung der beiden Verfahrungsarten vollständig auszuführen, ist noch nachzuweisen, dass auch die Verbesserungen $z(r)$ der Richtungen mit einander übereinstimmen, oder wenigstens nur um eine constante Grösse von einander verschieden sind. Zufolge des allgemeinen Ausdrucks

$$z(r) = f(r,I)(I) + f(r,II)(II) + f(r,III)(III) + \text{etc.}$$

bekommt man aus dem Art. 17

$$z(1) = -0.0417(IX) - 0.0644(X) + 0.0001(XII) - 0.0203(XIV) - 0.0022(XV)$$
$$- 0.0265(XVI) + 0.0152(XVII) + 0.0265(XVIII) - 0.0449(XIX)$$

u. s. w. Um diese Gleichungen übersichtlich aufzustellen, will ich sie in dieselbe tabularische Form bringen die oben angewandt wurde. Es wird daher

	(IX)	(X)	(XII)	(XIV)	(XV)	(XVI)
$z(1) =$	−0.0417	−0.0644	+0.0001	−0.0203	−0.0022	−0.0265
$z(2) =$	+0.0417	+0.1133	−0.0204	−0.0620	−0.0022	−0.0265
$z(3) =$		−0.0367	+0.0381	−0.0177	−0.0654	−0.0265
$z(4) =$			−0.0229	−0.0154	+0.0844	−0.0265
$z(5) =$				+0.0265	−0.0044	−0.0265
$z(6) =$				+0.0265	−0.0044	+0.0568
$z(7) =$				+0.0265	−0.0044	+0.0151
ferner	(XVII)	(XVIII)	(XIX)	(XX)	(XXII)	
$z(1)$	+0.0152	+0.0265	−0.0449			
$z(2)$	+0.0152	+0.0265	−0.0449			
$z(3)$	+0.0152	+0.0265	−0.0449			
$z(4)$	−0.0666	+0.0265	−0.0449			
$z(5)$	+0.0970	+0.0265	−0.0449			
$z(6)$	−0.0439	−0.0568	+0.0964	−0.0417	+0.0213	
$z(7)$	+0.0265	−0.0151	+0.0256	+0.0417	−0.0213	

wogegen der Art. 19 die folgende Zusammenstellung giebt.

	(IX)	(X)	(XII)	(XIV)	(XV)	(XVI)
$z(1) =$	-0.0417	-0.0644	$+0.0001$	-0.0007	-0.0054	
$z(2) =$	$+0.0417$	$+0.1133$	-0.0204	-0.0424	-0.0054	
$z(3) =$		-0.0367	$+0.0381$	$+0.0019$	-0.0686	
$z(4) =$			-0.0229	$+0.0045$	$+0.0811$	
$z(5) =$				$+0.0461$	-0.0077	
$z(6) =$				$+0.0461$	-0.0077	$+0.0833$
$z(7) =$				$+0.0461$	-0.0077	$+0.0417$
ferner	(XVII)	(XVIII)	(XIX)	(XX)	(XXII)	
$z(1)$	$+0.0088$					
$z(2)$	$+0.0088$					
$z(3)$	$+0.0088$					
$z(4)$	-0.0730					
$z(5)$	$+0.0906$					
$z(6)$	-0.0504	-0.0833	$+0.1410$	-0.0417	$+0.0213$	
$z(7)$	$+0.0201$	-0.0417	$+0.0705$	$+0.0417$	-0.0213	

Man erkennt leicht, dass dieses zweite System von Ausdrücken der $z(r)$ mit dem ersten identisch wird, wenn man jeder Gleichung desselben die constante Grösse

$$-0.0196\,(XIV) + 0.0032\,(XV) - 0.0265\,(XVI)$$
$$+ 0.0064\,(XVII) + 0.0265\,(XVIII) - 0.0449\,(XIX)$$

hinzufügt. Beide bis jetzt vollständig erörterte Verfahrungsarten führen daher auf identische Endresultate für die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes.

22.

Gehen wir noch, um möglichst vollständig zu sein, die übrigen im Vorhergehenden erklärten Zerlegungsarten durch. Um das Verfahren des Art. 12 weiter auszuführen, haben wir zu berücksichtigen, dass die beiden letzten Unbekannten nicht die Richtungen (6) und (7) selbst, sondern die Unterschiede dieser mit der Richtung (5) sind, und dieselben Unbekannten in die Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen einzuführen. Es ist zu dem Ende nichts weiter zu thun, als die Identitäten

$$\{(6) - (5)\} + (5) = (6)\,,\quad \{(7) - (5)\} + (5) = (7)$$

aufzustellen, und diese statt (6) und (7) zu substituiren. Die Tafel des Art. 16 steht daher jetzt so,

r	$q(r,IX)$	$\log q(r,X)$	$\log q(r,XII)$	$q(r,XIV)$	$\log q(r,XV)$	$q(r,XVI)$
1	−1	0.2071n	—	—	—	—
2	+1	0.4239	9.6930n	−1	—	—
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—
4	—	—	9.7405n	—	0.2931	—
5	—	—	—	+1	9.2205n	—
(6) — (5)	—	—	—		—	+1
(7) — (5)	—	—	—		—	—

r	$\log q(r,XVII)$	$q(r,XVIII)$	$\log q(r,XIX)$	$q(r,XX)$	$\log q(r,XXII)$
1	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—
4	0.2931n	—	—	—	—
5	0.2931	—	—	—	—
(6) — (5)	0.2284n	−1	0.2284	−1	9.7080
(7) — (5)	—	—	—	+1	9.7080n

Die jetzt anzuwendenden, aus dem Art. 12 zu entnehmenden Hülfsgrössen sind

$$\beta''' = 0\,, \qquad \beta^{IV} = 0\,, \qquad \beta' = 0\,,\ \delta''' = 0$$
$$\gamma''' = +(8.6990)\,,\ \gamma^{IV} = +(8.7448)\,,\ \gamma' = 0\,,\ \gamma'' = 0$$
$$\delta^{IV} = +(9.0458)\,,\ \delta' = 0\,,\ \delta'' = 0$$
$$\varepsilon' = 0\,,\ \varepsilon'' = 0$$
$$\zeta' = +(9.6990)$$

$$(1,1) = (1.3802)\,,\ (5,5,4) = (1.3290)$$
$$(2,2,1) = (1.3802)\,,\ (6,6,5) = (1.2041)$$
$$(3,3,2) = (1.4260)\,,\ (7,7,6) = (1.0792)$$
$$(4,4,3) = (1.3345)\,,$$

und hiemit erhält man die folgenden Werthe.

r	$\log \eta(r,IX)$	$\log \eta(r,X)$	$\log \eta(r,XII)$	$\log \eta(r,XIV)$	$\log \eta(r,XV)$	$\log \eta(r,XVI)$
1	0. n	0.2071n	—	—	—	—
2	0.	0.4293	9.6930n	0. n	—	—
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—
4	—	8.7175n	9.6971n	—	0.2728	—
5	—	8.7633n	7.4983n	0.	8.6794n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	0.
(7) — (5)	—	—	—	—	—	9.6990

r	$\log \eta(r,XVII)$	$\log \eta(r,XVIII)$	$\log \eta(r,XIX)$	$\log \eta(r,XX)$	$\log \eta(r,XXII)$
1	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—
4	0.2931n	—	—	—	—
5	0.2420	—	—	—	—
(6) — (5)	0.2284n	0. n	0.2284	0. n	9.7080
(7) — (5)	9.9274n	9.6990n	9.9274	9.6990	9.4070n

r	log Q(r, IX)	log Q(r, X)	log Q(r, XII)	log Q(r, XIV)	log Q(r, XV)	log Q(r, XVI)
1	8.6198n	8.8269n	—	—	—	—
2	8.6198	9.0437	8.3128n	8.6198n	—	—
3	—	9.5925n	8.5925	—	8.8287n	—
4	—	7.3830n	8.3626n	—	8.9383	—
5	—	7.4343n	6.169n	8.6710	7.3504n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.7959
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	log Q(r, XVII)	log Q(r, XVIII)	log Q(r, XIX)	log Q(r, XX)	log Q(r, XXII)
1	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—
4	8.9586n	—	—	—	—
5	8.9130	—	—	—	—
(6) — (5)	9.0243n	8.7959n	9.0243	8.7959n	8.5039
(7) — (5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n

r	log f(r, IX)	log f(r, X)	log f(r, XII)	log f(r, XIV)	log f(r, XV)	log f(r, XVI)
1	8.6198n	8.8269n	—	—	—	—
2	8.6198	9.0437	8.3128n	8.6198n	—	—
3	—	8.5955n	8.5795	7.4158	8.8006n	—
4	—	7.4343n	8.3630n	7.7168	8.9371	—
5	—	7.4343n	6.169 n	8.6740	7.3504n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.9208
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	log f(r, XVII)	log f(r, XVIII)	log f(r, XIX)	log f(r, XX)	log f(r, XXII)
1	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—
4	8.9129n	—	—	—	—
5	8.9130	—	—	—	—
(6) — (5)	9.4492n	8.9208n	9.4492	8.6198n	8.3278
(7) — (5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n

Die f Functionen lassen sich wieder eben so controliren wie die vorhergehenden, hier entziehen sich jedoch dieser Controle diejenigen, die zu (6)—(5) und (7)—(5) gehören, weil N' und N'' Null sind, und eine völlige Unabhängigkeit von den vorhergehenden Grossen statt findet.

23.

Der Beitrag, den beim gegenwärtigen Verfahren die in Rede stehende Station zu den Coefficienten der Endgleichungen liefert, ist der folgende.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)	(IX,XV)	(IX,XVI)
1	0.04167	+0.0671	0.	0.	0.	0.
2	0.04167	+0.1106	−0.02055	−0.04167	0.	0.
	0.08334	+0.1777	−0.02055	−0.04167		

r	$(IX,XVII)$	$(IX,XVIII)$	(IX,XIX)	(IX,XX)	$(IX,XXII)$	
1	0.	0.	0.	0.	0.	
2	0.	0.	0.	0.	0.	

r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)	(X,XVI)	$(X,XVII)$
1	0.1082	0.	0.	0.	0.	0.
2	0.2935	−0.05454	−0.1106	0.	0.	0.
3	0.0411	−0.03964	−0.0027	+0.06593	0.	0.
	0.4428	−0.09418	−0.1133	+0.06593		

r	$(X,XVIII)$	(X,XIX)	(X,XX)	$(X,XXII)$		
1	0.	0.	0.	0.		
2	0.	0.	0.	0.		
4	0.	0.	0.	0.		

r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVI)	$(XII,XVII)$	$(XII,XVIII)$
2	0.01014	+0.02055	0.	0.	0.	0.
3	0.03964	+0.00272	−0.06593	0.	0.	0.
4	0.01269	−0.00287	−0.04760	0.	+0.04503	0.
	0.06247	+0.02040	−0.11353		+0.04503	

r	(XII,XIX)	(XII,XX)	$(XII,XXII)$			
2	0.	0.	0.			
3	0.	0.	0.			
4	0.	0.	0.			

r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVI)	$(XIV,XVII)$	$(XIV,XVIII)$	(XIV,XIX)
2	0.04167	0.	0.	0.	0.	0.
5	0.04687	−0.00224	0.	+0.08184	0.	0.
	0.08854	−0.00224		+0.08184		

r	(XIV,XX)	$(XIV,XXII)$				
2	0.	0.				
5	0.	0.				

r	(XV,XV)	(XV,XVI)	$(XV,XVII)$	$(XV,XVIII)$	(XV,XIX)	(XV,XX)
3	0.1136	0.	0.	0.	0.	0.
4	0.1699	0.	−0.1607	0.	0.	0.
5	0.0004	0.	−0.0136	0.	0.	0.
	0.2839		−0.1743			

r	(XV,XXII)					
3 4 5	0. 0. 0.					
r	(XVI,XVI)	(XVI,XVII)	(XVI,XVIII)	(XVI,XIX)	(XVI,XX)	(XVI,XXII)
(6) — (5)	−0.08333	−0.1410	−0.08333	+0.1410	−0.04467	+0.02127
r	(XVII,XVII)	(XVII,XVIII)	(XVII,XIX)	(XVII,XX)	(XVII,XXII)	
4 5 (6) — (5)	0.4607 0.4607 0.2386	0. 0. +0.1410	0. 0. −0.2385	0. 0. +0.07050	0. 0. −0.03599	
	0.5600	+0.1410	−0.2385	+0.07050	−0.03599	
r	(XVIII,XVIII)	(XVIII,XIX)	(XVIII,XX)	(XVIII,XXII)		
(6) — (5)	0.08333	−0.1410	+0.04167	−0.02127		
r	(XIX,XIX)	(XIX,XX)	(XIX,XXII)			
(6) — (5)	0.2386	−0.07050	+0.03599			
r	(XX,XX)	(XX,XXII)				
(6) — (5) (7) — (5)	0.04467 0.04167	−0.02127 −0.02127				
	0.08334	−0.04254				
r	(XXII,XXII)					
(6) — (5) (7) — (5)	0.01086 0.01086					
	0.02172					

Die Vergleichung dieser Werthe mit den vorhergehenden durch andere Verfahrungsarten erhaltenen zeigt wieder die erwartete Uebereinstimmung.

24.

Zur Vergleichung der sich jetzt herausstellenden Ausdrücke der $z(r)$ mache ich zuerst die folgende Zusammenstellung aus dem Art. 22, in welcher ich durch Addition des Ausdrucks für $z(5)$ zu den beiden folgenden die Ausdrücke für $z(6)$ und $z(7)$ erhalten habe.

	(IX)	(X)	(XII)	(XIV)	(XV)	(XVI)
z(1) =	−0.0447	−0.0671				
z(2) =	+0.0417	+0.1106	−0.0205	−0.0417		
z(3) =		−0.0394	+0.0380	+0.0026	−0.0632	
z(4) =		−0.0027	−0.0231	+0.0052	+0.0865	
z(5) =		−0.0027	−0.0001	+0.0469	−0.0022	
z(6) =		−0.0027	−0.0001	+0.0469	−0.0022	+0.0833
z(7) =		−0.0027	−0.0001	+0.0469	−0.0022	+0.0417
ferner	(XVII)	(XVIII)	(XIX)	(XX)	(XXII)	
z(1)						
z(2)						
z(3)						
z(4)	−0.0818					
z(5)	+0.0818					
z(6)	−0.0592	−0.0833	+0.1410	−0.0417	+0.0213	
z(7)	+0.0413	−0.0417	+0.0705	+0.0417	−0.0213	

Die Vergleichung dieser mit der ersten Gruppe von ähnlichen Gleichungen des Art. 21 giebt zu erkennen, dass beide Gruppen identisch werden, wenn man in der vorstehenden jeder Gleichung die Constante

$+ 0.0027\ (X) + 0.0001\ (XII) - 0.0203\ (XIV) - 0.0022\ (XV)$
$- 0.0265 (XVI) + 0.0152\ (XVII) + 0.0265 (XVIII) - 0.0449 (XIX)$

hinzufügt. Die hier behandelte Zerlegung führt daher auf dieselben Werthe der Ausgleichung der Winkel des Dreiecksnetzes, wie die vorhergehenden.

25.

Gehen wir jetzt zum Verfahren des Art. 13 über, und führen auch für dieses den zweiten Theil der Auflösung aus, so müssen wir vor Allem in dem Täfelchen der Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen statt der fünf ersten Richtungen selbst ihre Unterschiede mit der ersten derselben einführen, während die Unterschiede (6)—(5) und (7)—(5) unverändert beibehalten werden müssen. Man erkennt aber leicht, dass die Einführung von (2)—(1), (3)—(1), etc. statt (2), (3), etc. die in der Tafel des Art. 22 angegebenen Werthe der $q(r,IX)$, $q(r,X)$, etc. gar nicht ändert, und es kann also unter der Bedingung, dass man die neben der 1 angegebenen Werthe weglässt, diese Tafel im gegenwärtigen Falle wieder angewandt werden.

Die jetzt anzuwendenden Hülfsgrössen sind zufolge des Art. 13 die folgenden,

$$\beta'' = +(9.4559), \beta''' = +(9.4881), \beta'' = +(9.6727), \beta' = 0, \beta'' = 0$$

$$\gamma''' = +(9.5145), \gamma'' = +(9.6990), \gamma' = 0, \gamma'' = 0$$

$$\delta'' = +(9.7238), \delta' = 0, \delta'' = 0$$

$$\varepsilon' = 0, \varepsilon'' = 0$$

$$\zeta' = +(9.6990)$$

$$(2,2,1) = (1.2741)\ ,\ (5,5,4) = (1.0528)$$

$$(3,3,2) = (1.2969)\ ,\ (6,6,5) = (1.2041)$$

$$(4,4,3) = (1.1957)\ ,\ (7,7,6) = (1.0792)$$

und hiemit ergeben sich die folgenden Werthe,

r	$\log \eta(r,IX)$	$\log \eta(r,X)$	$\log \eta(r,XII)$	$\log \eta(r,XIV)$	$\log \eta(r,XV)$	$\log \eta(r,XVI)$
(2) — (1)	0.	0.4239	9.6930n	0. n	—	—
(3) — (1)	9.4559	9.4558n	9.9557	9.4559n	0.2547n	—
(4) — (1)	9.4881	9.6771	9.5571n	9.4881n	0.1386	—
(5) — (1)	9.6727	9.8617	7.230 n	9.7237	8.4031n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	0.
(7) — (5)	—	—	—	—	—	9.6990

r	$\log \eta(r,XVII)$	$\log \eta(r,XVIII)$	$\log \eta(r,XIX)$	$\log \eta(r,XX)$	$\log \eta(r,XXII)$
(2) — (1)	—	—	—	—	—
(3) — (1)	—	—	—	—	—
(4) — (1)	0.2931n	—	—	—	—
(5) — (1)	9.9658	—	—	—	—
(6) — (5)	0.2284n	0. n	0.2281	0. n	9.7080
(7) — (5)	9.9274n	9.6990n	9.9274	9.6990	9.4070n

r	$\log Q(r,IX)$	$\log Q(r,X)$	$\log Q(r,XII)$	$\log Q(r,XIV)$	$\log Q(r,XV)$	$\log Q(r,XVI)$
(2) — (1)	8.7289	9.1528	8.4219n	8.7289n	—	—
(3) — (1)	8.1590	8.1589n	8.6588	8.1590n	8.9578n	—
(4) — (1)	8.2924	8.4814	8.3614n	8.2924n	8.9429	—
(5) — (1)	8.1699	8.8089	6.177 n	9.6709	7.3503n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.7959
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	$\log Q(r,XVII)$	$\log Q(r,XVIII)$	$\log Q(r,XIX)$	$\log Q(r,XX)$	$\log Q(r,XXII)$
(2) — (1)	—	—	—	—	—
(3) — (1)	—	—	—	—	—
(4) — (1)	9.0974n	—	—	—	—
(5) — (1)	8.9130	—	—	—	—
(6) — (5)	9.0234n	8.7959n	9.0243	8.7959n	8.5039
(7) — (5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n

r	log f(r,IX)	log f(r,X)	log f(r,XII)	log f(r,XIV)	log f(r,XV)	log f(r,XVI)
(2) — (1)	8.9208	9.2497	8.3126n	8.6196n	—	—
(3) — (1)	8.6198	8.4425	8.5798	7.4158	8.8006n	—
(4) — (1)	8.6198	8.8088	8.3627n	7.7168	8.9370	—
(5) — (1)	8.6199	8.8089	6.177 n	8.6709	7.3503n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.9208
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198
r	log f(r,XVII)	log f(r,XVIII)	log f(r,XIX)	log f(r,XX)	log f(r,XXII)	
(2) — (1)	—	—	—	—	—	
(3) — (1)	—	—	—	—	—	
(4) — (1)	8.9130n	—	—	—	—	
(5) — (1)	8.9130	—	—	—	—	
(6) — (5)	9.1492n	8.9208n	9.1492	8.6198n	8.3278	
(7) — (5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n	

Die Bedingungsgleichung, durch welche im Vorhergehenden die Werthe der *f* Functionen geprüft werden konnten, ist hier nicht anwendbar, da jetzt alle *N* Null sind.

26.

Der Beitrag, den die Station jetzt zu den Endgleichungen liefert, steht wie folgt, zur Abkürzung jedoch habe ich die Coefficienten, die unmittelbar Null werden, weggelassen.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)		
(2) — (1)	0.08333	+0.1777	−0.02054	−0.04165		
r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)		
(2) — (1)	0.4717	−0.05451	−0.1106	0.		
(3) — (1)	−0.0289	−0.03965	−0.0027	+0.06593		
	0.4428	−0.09416	−0.1133	+0.06593		
r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVII)		
(2) — (1)	0.01013	+0.02054	0.	0.		
(3) — (1)	0.03965	+0.00272	−0.06593	0.		
(4) — (1)	0.01268	−0.00287	−0.04759	+0.04503		
	0.06246	+0.02039	−0.11352	+0.04503		
r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVII)			
(2) — (1)	0.04165	0.	0.			
(3) — (1)	0.04687	−0.00224	+0.08184			
	0.08852	−0.00224	+0.08184			

r	(*XV*,*XV*)	(*XV*,*XVII*)				
(3) − (1)	0.1136	0.				
(4) − (1)	0.1699	−0.1607				
(5) − (1)	0.0004	−0.0136				
	0.2839	−0.1743				
r	(*XVI*,*XVI*)	(*XVI*,*XVII*)	(*XVI*,*XVIII*)	(*XVI*,*XIX*)	(*XVI*,*XX*)	(*XVI*,*XXII*)
(6) − (5)	0.08333	−0.1410	−0.08333	+0.1410	−0.04167	+0.02127
r	(*XVII*,*XVII*)	(*XVII*,*XVIII*)	(*XVII*,*XIX*)	(*XVII*,*XX*)	(*XVII*,*XXII*)	
(4) − (1)	0.1607	0.	0.	0.	0.	
(5) − (1)	0.1607	0.	0.	0.	0.	
(6) − (5)	0.2386	+0.1410	−0.2385	+0.07050	−0.03599	
	0.5600	+0.1410	−0.2385	+0.07050	−0.03599	
r	(*XVIII*,*XVIII*)	(*XVIII*,*XIX*)	(*XVIII*,*XX*)	(*XVIII*,*XXII*)		
(6) − (5)	0.08333	−0.1410	+0.04167	−0.02127		
r	(*XIX*,*XIX*)	(*XIX*,*XX*)	(*XIX*,*XXII*)			
(6) − (5)	0.2385	−0.07050	+0.03599			
r	(*XX*,*XX*)	(*XX*,*XXII*)				
(6) − (5)	0.04167	−0.02127				
(7) − (5)	0.04167	−0.02127				
	0.08334	−0.04254				
r	(*XXII*,*XXII*)					
(6) − (5)	0.01086					
(7) − (5)	0.01086					
	0.02172					

Auch diese Coefficienten stimmen mit den im Vorhergehenden auf verschiedene Arten überein, und die Unbekannten der Endgleichungen bekommen also wieder dieselben Werthe wie vorher.

27.

Stellt man wieder die Gleichungen für die $z(r)$ auf dieselbe Art zusammen wie vorher, so ergiebt sich.

	(IX)	(X)	(XII)	(XIV)	(XV)	(XVI)
$z(2)-z(1)=$	+0.0833	+0.1777	−0.0205	−0.0417		
$z(3)-z(1)=$	+0.0417	+0.0277	+0.0380	+0.0026	−0.0632	
$z(4)-z(1)=$	+0.0417	+0.0644	−0.0231	+0.0052	+0.0865	
$z(5)-z(1)=$	+0.0417	+0.0644	−0.0002	+0.0469	−0.0022	
$z(6)-z(1)=$	+0.0417	+0.0644	−0.0002	+0.0469	−0.0022	+0.0833
$z(7)-z(1)=$	+0.0417	+0.0644	−0.0002	+0.0469	−0.0022	+0.0417
ferner	(XVII)	(XVIII)	(XIX)	(XX)	(XXII)	
$z(2)-z(1)$						
$z(3)-z(1)$						
$z(4)-z(1)$	−0.0818					
$z(5)-z(1)$	+0.0818					
$z(6)-z(1)$	−0.0592	−0.0833	+0.1410	−0.0417	+0.0213	
$z(7)-z(1)$	+0.0113	−0.0417	+0.0705	+0.0417	−0.0213	

Die Vergleichung dieser Werthe mit denen der Artt. 21 und 24 bewirkt man dadurch, dass man in diesen die Gleichung für $z(1)$ von allen übrigen abzieht; man findet vollständige Uebereinstimmung.

28.

Wenden wir uns endlich auch zu dem Verfahren, welches im Art. 15 vorbereitet wurde, so müssen wir alle Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen auf die Unterschiede (1)—(5), (2)—(5), etc. der Richtungen beziehen, und man findet leicht, dass dieses dadurch bewirkt wird, dass man im Täfelchen des Art. 16 die neben der 5 stehenden Zahlen sich weg denkt. Mit dieser Auslassung ist daher dieses Täfelchen jetzt anzuwenden.

Die Hülfsgrössen, die aus dem Art. 15 zu entnehmen sind, sind die folgenden.

$$\alpha' = +(9.4559),\ \alpha'' = +(9.6021),\ \alpha''' = +(9.6990),\ \alpha^{iv} = 0,\ \alpha^{v} = 0,\ \alpha^{vi} = 0$$
$$\beta'' = +(9.6021),\ \beta''' = +(9.6990),\ \beta^{iv} = 0,\ \beta^{v} = 0,\ \beta^{vi} = 0$$
$$\gamma''' = +(9.6990),\ \gamma^{iv} = 0,\ \gamma^{v} = 0,\ \gamma^{vi} = 0$$
$$\delta^{iv} = 0,\ \delta^{v} = 0,\ \delta^{vi} = 0$$
$$\varepsilon^{v} = 0,\ \varepsilon^{vi} = 0$$
$$\zeta^{vi} = +(9.6990)$$

$$(1,1) = (1.2711),\ (4,4,3) = (1.0792)$$
$$(2,2,1) = (1.2341),\ (6,6,5) = (1.2041)$$
$$(3,3,2) = (1.2322),\ (7,7,6) = (1.0792)$$

vermittelst welcher die folgenden Werthe erlangt werden,

r	log η(r, IX)	log η(r, X)	log η(r, XII)	log η(r, XIV)	log η(r, XV)	log η(r, XVI)
(1) — (5)	0. n	0.2071n	—	—	—	—
(2) — (5)	9.8539	0.3412	9.6930n	0. n	—	—
(3) — (5)	—	9.7967n	9.9275	9.6021n	0.2547n	—
(4) — (5)	—	—	9.4391n	9.6990n	0.0274	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	0.
(7) — (5)	—	—	—	—	—	9.6990

r	log η(r, XVII)	log η(r, XVIII)	log η(r, XIX)	log η(r, XX)	log η(r, XXII)
(1) — (5)	—	—	—	—	—
(2) — (5)	—	—	—	—	—
(3) — (5)	—	—	—	—	—
(4) — (5)	0.2931n	—	—	—	—
(6) — (5)	0.2284n	0. n	0.2284	0. n	9.7080
(7) — (5)	9.9274n	9.6990n	9.9274	9.6990	9.4070n

r	log Q(r, IX)	log Q(r, X)	log Q(r, XII)	log Q(r, XIV)	log Q(r, XV)	log Q(r, XVI)
(1) — (5)	8.7289n	8.9360n	—	—	—	—
(2) — (5)	8.6198	9.1071	8.4589n	8.7659n	—	—
(3) — (5)	—	8.5645n	8.6953	8.3699n	9.0225n	—
(4) — (5)	—	—	8.3599n	8.6198n	8.9482	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.7959
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	log Q(r, XVII)	log Q(r, XVIII)	log Q(r, XIX)	log Q(r, XX)	log Q(r, XXII)
(1) — (5)	—	—	—	—	—
(2) — (5)	—	—	—	—	—
(3) — (5)	—	—	—	—	—
(4) — (5)	9.2139n	—	—	—	—
(6) — (5)	9.0243n	8.7959n	9.0243	8.7959n	8.5039
(7) — (5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n

r	log f(r, IX)	log f(r, X)	log f(r, XII)	log f(r, XIV)	log f(r, XV)	log f(r, XVI)
(1) — (5)	8.6197n	8.8090n	6.176	8.6709n	7.3522	—
(2) — (5)	8.6197	9.0542	8.3094n	8.9471n	7.3522	—
(3) — (5)	—	8.5645n	8.5814	8.6461n	8.7848n	—
(4) — (5)	—	—	8.3599n	8.6198n	8.9482	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.9208
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	log f(r, XVII)	log f(r, XVIII)	log f(r, XIX)	log f(r, XX)	log f(r, XXII)
(1) — (5)	8.9429n	—	—	—	—
(2) — (5)	8.9429n	—	—	—	—
(3) — (5)	8.9429n	—	—	—	— .
(4) — (5)	9.2439n	—	—	—	—
(6) — (5)	9.4492n	8.9208n	9.4492	8.6498n	8.3276
(7) — (5)	8.8482n	8.6197n	8.8481	8.6197	8.3276n

Auch hier ist die oben angewandte Bedingungsgleichung zur Controle unwirksam.

29.

Der Beitrag zu den Coefficienten der Endgleichungen steht jetzt so.

r	(IX, IX)	(IX, X)	(IX, XII)	(IX, XIV)	(IX, XV)	(IX, XVII)
(1) — (5)	0.04166	+0.0644	−0.00015	+0.04687	−0.00225	+0.08182
(2) — (5)	0.04166	+0.1133	−0.02039	−0.08854	+0.00225	−0.08182
	0.08332	+0.1777	−0.02054	−0.04167	0.	0.

r	(X, X)	(X, XII)	(X, XIV)	(X, XV)	(X, XVII)
(1) — (5)	0.1038	−0.00024	+0.0755	−0.00363	+0.1318
(2) — (5)	0.3007	−0.05441	−0.2350	+0.00597	−0.2172
(3) — (5)	0.0383	−0.03980	+0.0462	+0.06357	+0.0854
	0.4428	−0.09445	−0.1133	+0.06591	0.

r	(XII, XII)	(XII, XIV)	(XII, XV)	(XII, XVII)
(2) — (5)	0.01006	+0.04366	−0.00114	+0.04035
(3) — (5)	0.03980	−0.04620	−0.06357	−0.08538
(4) — (5)	0.01260	+0.02293	−0.04883	+0.09004
	0.06246	+0.02039	−0.11354	+0.04501

r	(XIV, XIV)	(XIV, XV)	(XIV, XVII)
(2) — (5)	0.08854	−0.00225	+0.08182

r	(XV, XV)	(XV, XVII)
(3) — (5)	0.1095	+0.1471
(4) — (5)	0.1743	−0.3214
	0.2838	−0.1743

r	(XVI, XVI)	(XVI, XVII)	(XVI, XVIII)	(XVI, XIX)	(XVI, XX)	(XVI, XXII)
(6) — (5)	0.08333	−0.1440	−0.08333	+0.1440	−0.04167	+0.02126

r	(XVII,XVII)	(XVII,XVIII)	(XVII,XIX)	(XVII,XX)	(XVII,XXII)	
(4) — (5)	0.3214	0.	0.	0.	0.	
(6) — (5)	0.2386	+0.1410	−0.2386	+0.07050	−0.03597	
	0.5600	+0.1410	−0.2386	+0.07050	−0.03597	
r	**(XVIII,XVIII)**	**(XVIII,XIX)**	**(XVIII,XX)**	**(XVIII,XXII)**		
(6) — (5)	0.08333	−0.1410	+0.04167	−0.02126		
r	**(XIX,XIX)**	**(XIX,XX)**	**(XIX,XXII)**			
(6) — (5)	0.2386	−0.07050	+0.03597			
r	**(XX,XX)**	**(XX,XXII)**				
(6) — (5)	0.04167	−0.02126				
(7) — (5)	0.04167	−0.02126				
	0.08333	−0.04252				
r	**(XXII,XXII)**					
(6) — (5)	0.01086					
(7) — (5)	0.01086					
	0.02172					

Hier haben wir wieder dieselben Werthe erhalten wie vorher, und es werden daher auch jetzt die Unbekannten der Endgleichungen dieselben Werthe erhalten wie vorher.

30.

Die Zusammenstellung der Gleichungen für die $z(r)$ ist jetzt

	(IX)	(X)	(XII)	(XIV)	(XV)	(XVI)
$z(1) - z(5) =$	−0.0417	−0.0644	+0.0001	−0.0469	+0.0022	
$z(2) - z(5) =$	+0.0417	+0.1133	−0.0204	−0.0885	+0.0022	
$z(3) - z(5) =$		−0.0367	+0.0381	−0.0443	−0.0609	
$z(4) - z(5) =$			−0.0229	−0.0417	+0.0888	
$z(6) - z(5) =$						+0.0833
$z(7) - z(5) =$						+0.0417

ferner	(XVII)	(XVIII)	(XIX)	(XX)	(XXII)	
$z(1) - z(5)$	−0.0818					
$z(2) - z(5)$	−0.0818					
$z(3) - z(5)$	−0.0818					
$z(4) - z(5)$	−0.1636					
$z(6) - z(5)$	−0.1410	−0.0833	+0.1410	−0.0417	+0.0213	
$z(7) - z(5)$	−0.0705	−0.0417	+0.0705	+0.0417	−0.0213	

deren Vergleichung mit den vorhergehenden ähnlichen Zusammenstellungen auch vollständige Uebereinstimmung zeigt.

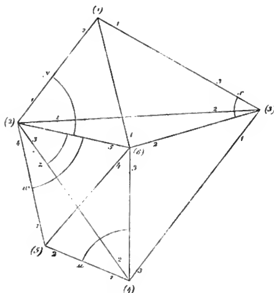
31.

Im Vorstehenden ist zur Gnüge gezeigt worden, dass die Zerlegung der Stationsgleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme, wo dieses möglich ist, ganz ohne Einfluss auf die Endresultate ist, und die ausgeglichenen Werthe der Beobachtungen dieselben werden, wie in dem Falle, wo diese Zerlegung nicht angewandt worden ist. Es fragt sich hierauf, ob die Anwendung dieser Zerlegung in praktischer Beziehung räthlich ist, und diese Frage muss entschieden bejaht werden. Denn durch die Durchsicht des im Vorhergehenden ausgeführten Beispiels findet man, dass die Rechnung mit Anwendung der Zerlegung viel kürzer ist, wie ohne dieselbe, und dieses muss in jedem Falle eintreffen, da durch die Zerlegung immer eine Anzahl der sonst erforderlichen Hülfsgrössen Null werden. Die beiden ersten Arten der Zerlegung sind vortheilhafter wie die beiden letzten, schon wegen der Bedingungsgleichungen die bei jenen statt finden.

Suppl. 6. Ableitung der Bedingungsgleichungen in besonderen Fällen, mit Beibehaltung der im Vorhergehenden stets angewandten Form derselben.

1.

Das jetzt zu betrachtende Dreiecksnetz soll das durch die folgende Figur dargestellte sein.



Wir haben hier sechs Dreieckspunkte oder Stationen, die durch die Zeichen (1), (2), (3), (4), (5), (6) angegeben sind, und es soll angenommen werden, dass auf der

Station (1)	die Richtungen	1, 2,	bez. nach	(3), (2)
- (2)	- -	1, 2, 3, 4	- -	(1), (3), (4), (5)
- (3)	- -	1, 2, 3,	- -	(4), (2), (1)
- (4)	- -	1, 2, 3,	- -	(5), (2), (3)
- (5)	- -	1, 2,	- -	(2), (4)
- (6)	- -	1, 2, 3, 4, 5,	- -	(1), (3), (4), (5), (2)

eingeschnitten worden sind, wie in der Figur angedeutet ist. Es können immerhin von den Stationen (1), (2), (3), (4), (5) noch mehr Richtungen eingeschnitten worden sein, die aber für den jetzigen Zweck nicht beachtet zu werden brauchen. Feste Annahme ist aber hier, dass keine Richtung nach der Station (6) eingeschnitten worden sei, hingegen von der Station (6) die Richtungen nach allen anderen Stationen eingeschnitten worden seien. Es fragt sich jetzt nach den Bedingungsgleichungen, die unter diesen Umständen das Vorhandensein der Station (6) liefert.

2.

Es ist sehr leicht zu finden, dass die Station (6) in diesem besonderen Falle nur zwei Bedingungsgleichungen liefern kann, und dass diese Seitengleichungen sein müssen. Um diese zu erhalten führe ich zuerst die Hülfswinkel (6) (3) (1) $= x$ und (6) (2) (1) $= y$ ein, die auch in der Figur angedeutet sind, worauf die Dreiecke (1) (3) (6), (1) (2) (3), (1) (2) (6) die folgenden Gleichungen geben

$$\frac{(1)(6)}{(1)(3)} = \frac{\sin x}{\sin\left[(3)_6 - (1)_6\right]}$$

$$\frac{(1)(3)}{(1)(2)} = \frac{\sin\left[(3)_2 - (1)_2\right]}{\sin\left[(3)_3 - (2)_3\right]}$$

$$\frac{(1)(2)}{(1)(6)} = \frac{\sin\left[(1)_6 - (2)_6\right]}{\sin y}$$

aus welchen die Bedingungsgleichung

$$1 = \frac{\sin x \sin\left[(3)_2 - (1)_2\right] \sin\left[(1)_6 - (2)_6\right]}{\sin y \sin\left[(3)_3 - (2)_3\right] \sin\left[(3)_6 - (1)_6\right]}$$

entspringt, die aber die beiden nicht beobachteten Winkel x und y enthält.

3.

Eine zweite Bedingungsgleichung ergiebt sich aus den Dreiecken (3)(4)(6), (2)(3)(4), (2)(4)(6), und zwar erhält man zuerst die Gleichungen

$$\frac{(4)(6)}{(3)(4)} = \frac{\sin\left[(3)_3 - (4)_3 - x\right]}{\sin\left[(3)_6 - (4)_6\right]}$$

$$\frac{(3)(4)}{(2)(4)} = \frac{\sin\left[(3)_2 - (2)_2\right]}{\sin\left[(2)_3 - (4)_3\right]}$$

$$\frac{(2)(4)}{(4)(6)} = \frac{\sin\left[(5)_6 - (3)_6\right]}{\sin z}$$

wo der Hülfswinkel $z = (4)(2)(6)$ ist, und hieraus

$$1 = \frac{\sin\left[(3)_2 - (2)_2\right] \sin\left[(3)_3 - (4)_3 - x\right] \sin\left[(5)_6 - (3)_6\right]}{\sin z \sin\left[(2)_3 - (4)_3\right] \sin\left[(3)_6 - (2)_6\right]}$$

in welcher die nicht beobachteten Winkel x und z vorkommen.

4.

Eine dritte Bedingungsgleichung gewähren die Dreiecke (4)(5)(6), (2)(4)(5), (2)(5)(6), nemlich zuerst, nachdem die Winkel (5)(4)(6) $= u$, und (6)(2)(5) $= w$ gesetzt worden sind, die Gleichungen

$$\frac{(5)(6)}{(4)(5)} = \frac{\sin u}{\sin\left[(4)_6 - (3)_6\right]}$$

$$\frac{(4)(5)}{(2)(5)} = \frac{\sin\left[(4)_2 - (3)_2\right]}{\sin\left[(2)_4 - (1)_4\right]}$$

$$\frac{(2)(5)}{(5)(6)} = \frac{\sin\left[(5)_6 - (4)_6\right]}{\sin w}$$

und hieraus

$$1 = \frac{\sin u \sin[(4)_2-(3)_2] \sin[(5)_6-(4)_6]}{\sin w \sin[(2)_4-(1)_4] \sin[(4)_6-(3)_6]}$$

aus welcher wieder die nicht beobachteten Winkel u und w zu eliminiren sind.

5.

Fur die Elimination der eingeführten nicht beobachteten Winkel bekommen wir aus der Figur die folgenden Gleichungen. Das Viereck (1)(2)(6)(3) giebt

$$360^0 = y + x + (2)_1 - (1)_1 + (2)_6 - (5)_6$$

Das Viereck (2)(5)(4)(6) giebt

$$360^0 = u + w + (2)_5 - (1)_5 + (5)_6 - (3)_6$$

und der Dreieckspunkt (2) giebt

$$z + y = (3)_2 - (1)_2$$
$$w + y = (4)_2 - (1)_2$$

und hieraus bekommt man

$$y = (1)_1 - (2)_1 + (5)_6 - (2)_6 - x$$
$$z = (2)_1 - (1)_1 + (3)_2 - (1)_2 + (2)_6 - (5)_6 + x$$
$$w = (2)_1 - (1)_1 + (4)_2 - (1)_2 + (2)_6 - (5)_6 + x$$
$$u = (1)_1 - (2)_1 + (1)_2 - (4)_2 + (1)_5 - (2)_5 + (3)_6 - (2)_6 - x$$

oder wenn man noch das Dreieck (3)(4)(6) zuzieht,

$$u = 180^0 + (3)_3 - (1)_3 + (3)_4 - (1)_4 + (3)_6 - (2)_6 - x$$

welcher Ausdruck etwas einfacher ist, wie der vorstehende. Die Substitution dieser Ausdrücke in die vorher gefundenen Bedingungsgleichungen bringt diese auf die folgende Form,

$$1 = \frac{\sin x \sin[(2)_2-(1)_2] \sin[(1)_6-(5)_6]}{\sin[(1)_1-(2)_1+(5)_6-(2)_6-x] \sin[(3)_3-(2)_3] \sin[(2)_6-(1)_6]}$$
$$1 = \frac{\sin[(3)_2-(2)_2] \sin[(2)_3-(1)_3-x] \sin[(5)_6-(3)_6]}{\sin[(2)_1-(1)_1+(3)_2-(1)_2+(2)_6-(5)_6+x] \sin[(2)_3-(1)_3] \sin[(3)_6-(2)_6]}$$
$$1 = \frac{\sin[(1)_3-(3)_3+(1)_4-(3)_4+(2)_6-(3)_6+x] \sin[(4)_2-(3)_2] \sin[(5)_6-(4)_6]}{\sin[(2)_1-(1)_1+(4)_2-(1)_2+(2)_6-(5)_6+x] \sin[(2)_4-(1)_4] \sin[(4)_6-(3)_6]}$$

in welchen nur noch der nicht beobachtete Winkel x vorkommt, nach dessen Elimination sie zwei von einander unabhängige Bedingungsgleichungen bilden. Die Elimination von x ist zwar möglich aber umständlich, auch würde sie die Form der Gleichungen gänzlich verändern. Diese Elimination ist aber auch überflüssig, denn man kann die Gleichungen in ihrer vorstehenden Form bequem anwenden.

6.

Die Auflösung der ersten Gleichung nach x giebt

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin[(3)_3-(2)_3]\sin[(2)_6-(1)_6]\sin[(1)_1-(2)_1+(5)_6-(2)_6]}{\left\{\begin{array}{l}\sin[(2)_2-(1)_2]\sin[(1)_6-(5)_6]\\+\sin[(3)_3-(2)_3]\sin[(2)_6-(1)_6]\cos[(1)_1-(2)_1+(5)_6-(2)_6]\end{array}\right\}}$$

woraus man durch Hülfe der beobachteten Werthe der betr. Richtungen den Werth von x erhält. Die Substitution dieses nebst den Werthen der betr. Richtungen in die zweite und dritte Gleichung giebt die Werthe der beiden dazu gehörigen $F(\ )$. Differentiirt man ferner alle drei Gleichungen auf dieselbe Art wie in der Abhandlung gezeigt worden ist, und dividirt die erste Differentialgleichung durch den Coefficienten von δx, so bekommt man diese Variation ausgedrückt durch die Variationen der beobachteten Richtungen, die in der ersten Gleichung vorkommen. Durch Hülfe dieser Gleichung kann man aus den beiden anderen Differentialgleichungen δx eliminiren, wodurch sich die beiden von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen der Aufgabe, ausgedrückt durch die Variationen der beobachteten Richtungen ergeben.

7.

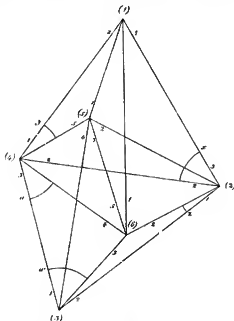
In dem im Vorhergehenden betrachteten Falle entstanden zwei von einander unabhängige Bedingungsgleichungen durch die beschriebene Einführung des Punkts (6), und überhaupt werden, wie leicht einzusehen ist, $m-3$ solcher Gleichungen vorhanden sein, wenn von diesem Punkte aus die Richtungen nach m Dreieckspunkten eingeschnitten worden sind. Alle diese Gleichungen werden eben so, wie im Vorhergehenden gezeigt worden ist, erhalten.

Nehmen wir jetzt an, dass der Punkt (6) in einem bereits fertigen, ausgeglichenen Dreiecksnetze eingeschaltet worden ist, so kommen wir auf die Ausdehnung der Pothenot'schen Aufgabe auf den Fall, in welchem man von Punkt (6) aus eine grössere Anzahl von Richtungen eingeschnitten hat, als zur Auflösung dieser Aufgabe hinreichend und nothwendig sind. Die Bedingungsgleichungen sind in diesem Falle dieselben wie oben, nur kann man jetzt nicht die Variationen der von den anderen Punkten aus beobachteten Richtungen berücksichtigen, sondern muss sich begnügen nur die vom zu bestimmenden Punkt aus beobachteten so auszugleichen, dass die Summe ihrer Fehlerquadrate ein Minimum

wird. Wie dieses bewirkt wird ergiebt sich aus dem Inhalt der Abhandlung von selbst, und braucht daher wohl hier nicht näher erörtert zu werden.

8.

Wenden wir uns jetzt zu der Aufgabe, zu welcher die folgende Figur gehört.



Hier wird angenommen, dass zwar von den Punkten (5) und (6) aus alle übrigen Punkte der Figur eingeschnitten worden sind, aber von diesen die (5) und (6) nicht. Es sollen daher auf der

Station	(1)	die Richtungen	1, 2,	bez. nach		(2), (4),
-	(2)	- -	1, 2, 3,	-	-	(3), (4), (1)
-	(3)	- -	1, 2,	-	-	(4), (2),
-	(4)	- -	1, 2, 3,	-	-	(1), (2), (3),
-	(5)	- -	1, 2, 3, 4, 5,	-	-	(1), (2), (6), (3), (4),
-	(6)	- -	1, 2, 3, 4, 5,	-	-	(1), (2), (3), (4), (5),

als eingeschnitten gedacht werden, gleichwie in der Figur angedeutet ist.

9.

Da die Punkte (5) und (6) unter andern durch die Messung der Winkel

$$(2)(5)(6) = (3)_5 - (2)_5\,,\quad (6)(5)(4) = (5)_5 - (3)_5$$
$$(5)(6)(2) = (2)_6 - (5)_6\,,\quad (5)(6)(4) = (5)_6 - (4)_6$$

vollständig bestimmt sind, so folgt dass, abgesehen von sonstigen Bedingungsgleichungen, die die Figur darbieten kann, die vorhandenen Beobachtungen von den beiden genannten Punkten aus vier von einander unabhängige Bedingungsgleichungen liefern müssen. Diese lassen sich auf ähnliche Art wie in der vorhergehenden Aufgabe aufstellen.

10.

Die Dreiecke (1)(2)(5), (1)(2)(4), (1)(4)(5) der Figur geben zuerst

$$\frac{(1)(5)}{(1)(2)} = \frac{\sin x}{\sin[(2)_5 - (1)_5]}$$
$$\frac{(1)(2)}{(1)(4)} = \frac{\sin[(2)_4 - (1)_4]}{\sin[(3)_2 - (2)_2]}$$
$$\frac{(1)(4)}{(1)(5)} = \frac{\sin[(4)_5 - (5)_5]}{\sin y}$$

und hieraus ergiebt sich

$$1 = \frac{\sin x \sin[(2)_4 - (1)_4] \sin[(4)_5 - (5)_5]}{\sin y \sin[(3)_2 - (2)_2] \sin[(2)_5 - (1)_5]}$$

wo $x = (1)(2)(5)$, $y = (1)(4)(5)$ zwei nicht beobachtete Winkel sind.

11.

Die Dreiecke (2)(3)(5), (2)(3)(4), (3)(4)(5) geben die folgenden Gleichungen

$$\frac{(3)(5)}{(2)(3)} = \frac{\sin[(3)_2 - (4)_2 - x]}{\sin[(4)_5 - (2)_5]}$$
$$\frac{(2)(3)}{(3)(4)} = \frac{\sin[(3)_4 - (2)_4]}{\sin[(2)_2 - (4)_2]}$$
$$\frac{(3)(4)}{(3)(5)} = \frac{\sin[(5)_5 - (4)_5]}{\sin[(3)_4 - (4)_4 - y]}$$

und hieraus erhält man

$$1 = \frac{\sin[(3)_2 - (4)_2 - x] \sin[(3)_4 - (2)_4] \sin[(5)_5 - (4)_5]}{\sin[(3)_4 - (4)_4 - y] \sin[(2)_2 - (4)_2] \sin[(4)_5 - (2)_5]}$$

wo x und y dieselbe Bedeutung haben wie im vor. Art.

12.

Die Dreiecke (1)(2)(6), (1)(2)(4), (1)(4)(6) geben die folgenden Gleichungen

$$\frac{(1)(6)}{(1)(2)} = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2-z]}{\sin[(2)_6-(5)_6]}$$

$$\frac{(1)(2)}{(1)(4)} = \frac{\sin[(2)_4-(1)_4]}{\sin[(3)_2-(2)_2]}$$

$$\frac{(1)(4)}{(1)(6)} = \frac{\sin[(1)_6-(4)_6]}{\sin[(3)_4-(1)_4-u]}$$

und hieraus

$$1 = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2-z]\,\sin[(2)_4-(1)_4]\,\sin[(1)_6-(4)_6]}{\sin[(3)_4-(1)_4-u]\,\sin[(3)_2-(2)_2]\,\sin[(1)_6-(5)_6]}$$

wo wieder $z = (3)(2)(6)$, $u = (3)(4)(6)$ zwei nicht beobachtete Winkel sind.

13.

Die Dreiecke (3)(4)(6), (2)(3)(4), (2)(4)(6) geben

$$\frac{(4)(6)}{(3)(4)} = \frac{\sin w}{\sin[(4)_6-(3)_6]}$$

$$\frac{(3)(4)}{(2)(4)} = \frac{\sin[(2)_2-(1)_2]}{\sin[(2)_3-(1)_3]}$$

$$\frac{(2)(4)}{(4)(6)} = \frac{\sin[(2)_6-(4)_6]}{\sin[(2)_2-(1)_2-z]}$$

und hieraus

$$1 = \frac{\sin w\,\sin[(2)_2-(1)_2]\,\sin[(2)_6-(4)_6]}{\sin[(2)_2-(1)_2-z]\,\sin[(2)_6-(1)_6]\,\sin[(4)_6-(3)_6]}$$

wo z derselbe Winkel ist wie im vor. Art. und $w = (4)(3)(6)$ ein hinzugekommener nicht beobachteter Winkel ist.

14.

Die Dreiecke endlich (2)(5)(6), (2)(4)(5), (4)(5)(6) geben

$$\frac{(5)(6)}{(2)(5)} = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2-x-z]}{\sin[(2)_6-(5)_6]}$$

$$\frac{(2)(5)}{(4)(5)} = \frac{\sin[(2)_4-(1)_4-y]}{\sin[(3)_2-(2)_2-x]}$$

$$\frac{(4)(5)}{(5)(6)} = \frac{\sin[(3)_6-(4)_6]}{\sin[(3)_4-(1)_4-y-u]}$$

woraus

$$1 = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2-x-z]\,\sin[(2)_4-(1)_4-y]\,\sin[(5)_6-(4)_6]}{\sin[(3)_4-(1)_4-y-u]\,\sin[(3)_2-(2)_2-x]\,\sin[(2)_6-(5)_6]}$$

hervorgeht, und die Winkel x, y, z, u dieselben sind wie im Vorhergehenden. Hiemit sind die Bedingungsgleichungen erschöpft.

15.

Um die eingeführten, nicht beobachteten Winkel als Functionen von x darzustellen, dienen die folgenden Betrachtungen. Das Viereck (1)(2)(5)(4) giebt

$$360^\circ = x + y + (2)_1 - (1)_1 + (2)_5 - (5)_5$$

Das Viereck (2)(3)(4)(6) giebt

$$360^\circ = u + z + (2)_3 - (1)_3 + (4)_6 - (2)_6$$

Das Dreieck (2)(5)(6) giebt

$$180^\circ = (3)_2 - (1)_2 - x - z + (3)_5 - (2)_5 + (2)_6 - (5)_6$$

und das Dreieck (3)(4)(6) giebt

$$180^\circ = u + w + (4)_6 - (3)_6$$

Durch die Elimination erhält man hieraus

$$y = (1)_1 - (2)_1 + (5)_5 - (2)_5 - x$$
$$z = 180^\circ + (3)_2 - (1)_2 + (3)_5 - (2)_5 + (2)_6 - (5)_6 - x$$
$$u = 180^\circ - (3)_2 + (1)_2 - (2)_3 + (1)_3 - (3)_5 + (2)_5 - (4)_6 + (5)_6 + x$$
$$w = (3)_2 - (1)_2 + (2)_3 - (1)_3 + (3)_5 - (2)_5 + (3)_6 - (5)_6 - x$$

16.

Löst man nun die Bedingungsgleichung des Art. 10, nachdem darin der Ausdruck für y substituirt worden ist, in Bezug auf x auf, und substituirt auch die oben erhaltenen Ausdrücke der y, z, u, w in die Bedingungsgleichungen der Artt. 11, 12, 13, 14, so erhält man

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin[(3)_2 - (2)_2] \sin[(2)_5 - (1)_5] \sin[(1)_1 - (2)_1 + (5)_5 - (2)_5]}{\left\{\begin{array}{l}\sin[(2)_4 - (1)_4] \sin[(1)_5 - (5)_5] + \\ \sin[(3)_2 - (2)_2] \sin[(2)_5 - (1)_5] \cos[(1)_1 - (2)_1 + (5)_5 - (2)_5]\end{array}\right\}}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_2 - (1)_2 - x] \sin[(3)_4 - (2)_4] \sin[(5)_5 - (4)_5]}{\sin[(2)_1 - (1)_1 + (3)_4 - (1)_4 + (2)_5 - (5)_5 + x] \sin[(2)_2 - (1)_2] \sin[(4)_5 - (2)_5]}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_5 - (2)_5 + (2)_6 - (5)_6 - x] \sin[(2)_4 - (1)_4] \sin[(1)_6 - (4)_6]}{\sin[(2)_1 - (1)_1 + (2)_5 - (3)_5 + (5)_6 - (4)_6 + x] \sin[(3)_2 - (2)_2] \sin[(2)_6 - (5)_6]}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_2 - (1)_2 + (2)_3 - (1)_3 + (3)_5 - (2)_5 + (3)_6 - (5)_6 - x] \sin[(2)_2 - (1)_2] \sin[(2)_6 - (4)_6]}{\sin[(3)_2 - (2)_2 + (3)_5 - (2)_5 + (2)_6 - (5)_6 - x] \sin[(2)_3 - (1)_3] \sin[(4)_6 - (3)_6]}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_5 - (1)_5 + (2)_6 - (3)_6] \sin[(1)_1 - (2)_1 + (2)_4 - (1)_4 + (5)_5 - (2)_5 + x] \sin[(5)_6 - (4)_6]}{\sin[(5)_5 - (3)_5 + (5)_6 - (4)_6] \sin[(3)_2 - (2)_2 - x] \sin[(2)_6 - (5)_6]}$$

die vier von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen gleich kommen, und in der Anwendung eben so behandelt werden müssen, wie die ähnlichen der vorhergehenden Aufgabe.

17.

Wenn auf diese Art in einem bereits ausgeglichenen Dreiecksnetze zwei Punkte eingeschnitten werden, so fallen in den Differentialen der Bedingungsgleichungen wieder die Variationen der von den Punkten 1, 2, 3, 4 aus beobachteten Richtungen weg, und man kommt auf den Fall, in welchem bei der Anwendung der Aufgabe, die ich in den Astr. Nachr. B. XVIII gegeben habe, man sich mehr Data verschafft hat, wie hinreichend und nothwendig sind. Da die weitere Behandlung theils aus dem Inhalt der Abhandlung folgt, theils auf andere Art von mir a. a. O. ausgeführt worden ist, so braucht sie wohl auch hier nicht erörtert zu werden.

Suppl. 7. Berichtigung eines in der Abhandlung vorkommenden kleinen Misgriffs.

Im Art. 149 wird gesagt, dass für $m = \infty$ der mittlere, und der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung Null werden. Dieser Satz ist dahin abzuändern, dass bei stets wachsendem m die Werthe der Quotienten $\frac{W}{m-n}$ und $\frac{W}{m}$ nach einer und derselben Grenze hinstreben. Diese Berichtigung hat übrigens keinen Einfluss auf die in der Abhandlung folgenden Schlüsse

Suppl. 8. Berechnung der $f(r,I)_s$, etc. und der (I,M), etc. ohne Zuziehung der $\eta(r,I)_s$, etc.

1.

In der Abhandlung habe ich gezeigt, dass man die Coefficienten der Endgleichungen auf vier von einander verschiedene Arten berechnen kann. Zwei dieser Arten beruhen auf der Zuziehung der $\eta(r,I)_s$, etc., und die zwei anderen sind von diesen Grössen unabhängig. Zur Berechnung der $f(r,I)_s$, etc. und der (I,M), etc., welche letzteren bei der Berechnung der Gewichte vorkommen, habe ich schliesslich nur Ein Verfahren, bei welchem die $\eta(r,I)_s$, etc. gebraucht werden angegeben, während die Abhandlung hiefür schon ein zweites Verfahren enthält, welches von diesen Grössen unabhängig ist. Dieses soll hier ausgehoben werden.

2.

Zur Berechnung der Coefficienten der Endgleichungen ohne Zuziehung der $\eta(r,I)_s$ braucht man die unbestimmte Elimination der Stationsgleichungen, wie man gesehen hat, nicht ausgeführt zu haben, will man aber auch die $f(r,I)_s$, etc. und die (I,M), etc. ohne Anwendung jener Grössen berechnen, so muss vorher jene unbestimmte Elimination ausgeführt worden sein. Ich mache daher den Anfang damit die Ausdrücke der Coefficienten dieser anzusetzen, die ich aus dem Art. 37 der Abhandlung entnehme. Bezeichnet man diese Coefficienten, um Verwechselungen vorzubeugen, mit $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, etc. $\{2,2\}$, etc. etc. und lässt die Glieder weg, die zufolge des »ersten Verfahrens« immer Null werden, so gehen die angezogenen Ausdrücke in die folgenden über.

$$\{1,1\} = \frac{1}{(1,1)}$$
$$\{1,2\} = 0$$
$$\{1,3\} = 0$$
etc.

$$\{2,2\} = \frac{1}{(2,2,1)} + \qquad + \frac{\beta'''}{(4,4,3)}\,\beta''' + \frac{\beta^{\mathrm{IV}}}{(5,5,4)}\,\beta^{\mathrm{IV}} + \frac{\beta^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)}\,\beta^{\mathrm{V}} + \ldots$$

$$\{2,3\} = \frac{\beta'''}{(4,4,3)}\,\gamma''' + \frac{\beta^{\mathrm{IV}}}{(5,5,4)}\,\gamma^{\mathrm{IV}} + \frac{\beta^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)}\,\gamma^{\mathrm{V}} + \ldots$$

$$\{2,4\} = \frac{\beta'''}{(4,4,3)} + \frac{\beta^{\mathrm{IV}}}{(5,5,4)}\,\delta^{\mathrm{IV}} + \frac{\beta^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)}\,\delta^{\mathrm{V}} + \ldots$$

$$\{2,5\} = \frac{\beta^{\mathrm{IV}}}{(5,5,4)} + \frac{\beta^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)}\,\varepsilon^{\mathrm{V}} + \ldots$$

$$\{2,6\} = \frac{\beta^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)} + \ldots$$

etc. etc.

$$\{3,3\} = \frac{1}{(3,3,2)} + \frac{\gamma'''}{(4,4,3)}\,\gamma''' + \frac{\gamma^{\mathrm{IV}}}{(5,5,4)}\,\gamma^{\mathrm{IV}} + \frac{\gamma^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)}\,\gamma^{\mathrm{V}} + \ldots$$

$$\{3,4\} = \frac{\gamma'''}{(4,4,3)} + \frac{\gamma^{\mathrm{IV}}}{(5,5,4)}\,\delta^{\mathrm{IV}} + \frac{\gamma^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)}\,\delta^{\mathrm{V}} + \ldots$$

$$\{3,5\} = \frac{\gamma^{\mathrm{IV}}}{(5,5,4)} + \frac{\gamma^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)}\,\varepsilon^{\mathrm{V}} + \ldots$$

$$\{3,6\} = \frac{\gamma^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)} + \ldots$$

etc. etc.

$$\{4,4\} = \frac{1}{(4,4,3)} + \frac{\delta^{\mathrm{IV}}}{(5,5,4)}\,\delta^{\mathrm{IV}} + \frac{\delta^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)}\,\delta^{\mathrm{V}} + \ldots$$

$$\{4,5\} = \frac{\delta^{\mathrm{IV}}}{(5,5,4)} + \frac{\delta^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)}\,\varepsilon^{\mathrm{V}} + \ldots$$

$$\{4,6\} = \frac{\delta^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)} + \ldots$$

etc. etc.

$$\{5,5\} = \frac{1}{(5,5,4)} + \frac{\varepsilon^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)}\,\varepsilon^{\mathrm{V}} + \ldots$$

$$\{5,6\} = \frac{\varepsilon^{\mathrm{V}}}{(6,6,5)} + \ldots$$

etc. etc.

$$\{6,6\} = \frac{1}{(6,6,5)} + \ldots$$

etc.

etc.

die man beliebig fortsetzen kann.

3.

Wenden wir uns jetzt zum Art. 35 der Abhandlung, und führen in die dort für $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, etc. gegebenen Ausdrücke die später angewandte Bezeichnung ein, so werden sogleich

$f(1,I)_s = \{1,1\}.q(1,I)_s$

$f(2,I)_s = \{2,2\}.q(2,I)_s + \{2,3\}.q(3,I)_s + \{2,4\}.q(4,I)_s + \{2,5\}.q(5,I)_s + \ldots$

$f(3,I)_s = \{2,3\}.q(2,I)_s + \{3,3\}.q(3,I)_s + \{3,4\}.q(4,I)_s + \{3,5\}.q(5,I)_s + \ldots$

$f(4,I)_s = \{2,4\}.q(2,I)_s + \{3,4\}.q(3,I)_s + \{4,4\}\ q(4,I)_s + \{4,5\}.q(5,I)_s + \ldots$

$f(5,I)_s = \{2,5\}.q(2,I)_s + \{3,5\}.q(3,I)_s + \{4,5\}.q(4,I)_s + \{5,5\}.q(5,I)_s + \ldots$

etc. etc.

die durch allmählige Vertauschung der I mit II, III, etc. auf alle Bedingungsgleichungen ausgedehnt werden müssen.

4.

Die zur Berechnung der Gewichte erforderlichen (I,M), (II,M), etc. findet man in demselben angezogenen Art. der Abhandlung wie folgt.

$$(I,M) = \Sigma\{\ f(1,I)_s \,.\, k(1)_s + \ f(2,I)_s \,.\, k(2)_s + \ f(3,I)_s \,.\, k(3)_s + \ldots\}$$

$$(II,M) = \Sigma\{\ f(1,II)_s \,.\, k(1)_s + \ f(2,II)_s \,.\, k(2)_s + \ f(3,II)_s \,.\, k(3)_s + \ldots\}$$

$$(III,M) = \Sigma\{f(1,III)_s \,.\, k(1)_s + f(2,III)_s \,.\, k(2)_s + f(3,III)_s \,.\, k(3)_s + \ldots\}$$

etc. etc.

wo das Summenzeichen sich auf s bezieht. Bei der Anwendung dieses Verfahrens wird zwar die Berechnung der $\eta(r,I)_s$, etc. überflüssig, aber dafür tritt die unbestimmte Auflösung der Stationsgleichungen ein.

Suppl. 9. Die mit α, β, γ, etc. nebst angehängten Strichen bezeichneten Grössen betreffend.

1.

Von den in der Ueberschrift genannten Grössen kommen in der Abhandlung zwei Systeme vor. Das erste dieser, welches sich bei der Auflösung der Stationsgleichungen unmittelbar ergiebt, ist das folgende:

$$\begin{array}{lllll} \alpha', & \beta', & \gamma', & \delta', & \text{etc.} \\ & \beta'', & \gamma'', & \delta'', & \text{etc.} \\ & & \gamma''', & \delta''', & \text{etc.} \\ & & & \delta'''', & \text{etc.} \\ & & & & \text{etc.} \end{array}$$

und das zweite, welches aus jenem berechnet wird ist

$$\begin{array}{rrrrl} \alpha', & \alpha'', & \alpha''', & \alpha^{iv}, & \text{etc.} \\ & \beta'', & \beta''', & \beta^{iv}, & \text{etc.} \\ & & \gamma''', & \gamma^{iv}, & \text{etc.} \\ & & & \delta^{iv}, & \text{etc.} \\ & & & & \text{etc.} \end{array}$$

Dieses letztere wird vorzüglich zur Berechnung der $w(1)$, $w(2)$, etc. aus den reducirten Stationsgleichungen, so wie bei der Berechnung der $\eta(r,I)_s$, etc. und der $f(r,I)_s$, etc. gebraucht. Auch ist gezeigt worden, wie die Coefficienten der unbestimmten Elimination von diesem System abhängen. Hier werde ich zeigen, dass alle betreffenden Ausdrücke so umgeformt werden können, dass sie von dem ersten System der obigen Grössen abhängen.

2.

In den Ausgleichungen auf den Stationen habe man die Rechnung bis zu den reducirten Gleichungen fortgesetzt, nemlich bis zu dem System von Gleichungen, in welchem jede Gleichung Eine Unbekannte weniger wie die nächstvorhergehende enthält. Es werden hiebei, wenn das erste Verfahren der Abhandlung angewandt wird, alle α nebst $\beta'' = 0$ sein, und man bekommt hierauf statt der in der Abhandlung angegebenen, von β''', β^{iv}, etc. γ''', γ^{iv}, etc. δ^{iv} etc. abhängigen Ausdrücke die folgenden,

$$\begin{array}{lllllll} w(1) = & -\chi' & & & & & \\ w(2) = & -\chi'' & & +\gamma''\, w(4) & +\delta''\, w(5) & +\varepsilon''\, w(6) & +\ldots \\ w(3) = & & -\chi''' & +\gamma'''\, w(4) & +\delta'''\, w(5) & +\varepsilon'''\, w(6) & +\ldots \\ w(4) = & & & -\chi^{iv} & +\delta^{iv}\, w(5) & +\varepsilon^{iv}\, w(6) & +\ldots \\ w(5) = & & & & -\chi^{v} & +\varepsilon^{v}\, w(6) & +\ldots \\ w(6) = & & & & & -\chi^{vi} & +\ldots \\ \text{etc.} & & & & & & \text{etc.} \end{array}$$

die eben so leicht wie alle übrigen Ausdrücke auf eine beliebige Anzahl von Unbekannten ausgedehnt werden können. Bei der Anwendung dieser Ausdrücke muss man bei der letzten derselben anfangen, und darauf die vorletzte u. s. w. berechnen. Diese Ausdrücke sind nichts weiter wie die auf die Stationsgleichungen angewandten, und anders aufgestellten Ausdrücke des Art. 49 oder bez. 142 (S. 214) der Abhandlung.

3.

Durch Hülfe der zwischen den hier in Betracht stehenden beiden Systemen stattfindenden Relationen findet man durch die Elimination leicht, statt der in der Abhandlung angegebenen Ausdrücke, die folgenden,

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3.I)_s = q(3,I)_s$$
$$\eta(4,I)_s = \gamma''_s.\eta(2,I)_s + \gamma'''_s.\eta(3,I)_s + q(4,I)_s$$
$$\eta(5,I)_s = \delta''_s.\eta(2,I)_s + \delta'''_s.\eta(3,I)_s + \delta^{IV}_s.\eta(4,I)_s + q(5,I)_s$$
$$\eta(6,I)_s = \varepsilon''_s.\eta(2,I)_s + \varepsilon'''_s.\eta(3,I)_s + \varepsilon^{IV}_s.\eta(4,I)_s + \varepsilon^{V}_s.\eta(5,I)_s + q(6,I)_s$$

etc. etc.

bei deren Anwendung von der ersten angefangen wird. Ferner giebt eine leichte Elimination

$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s \quad + \gamma''_s.f(4,I)_s + \delta''_s.f(5,I)_s + \varepsilon''_s.f(6,I)_s + \ldots$$
$$f(3.I)_s = Q(3,I)_s + \gamma'''_s.f(4{:}I)_s + \delta'''_s.f(5,I)_s + \varepsilon'''_s.f(6,I)_s + \ldots$$
$$f(4,I)_s = Q(4.I)_s + \delta^{IV}_s.f(5,I)_s + \varepsilon^{IV}_s.f(6,I)_s + \ldots$$
$$f(5,I)_s = Q(5.I)_s + \varepsilon^{V}_s.f(6,I)_s + \ldots$$
$$f(6,I)_s = Q(6,I)_s + \ldots$$

etc. etc.

die denen für die $w(1)$, $w(2)$, etc. völlig ähnlich sind, und wie diese in umgekehrter Ordnung zur Anwendung kommen.

4.

Die bei der Berechnung der Gewichte erforderlichen mit $(M,1)_s$, etc. bezeichneten Grössen werden eben so wie $\eta(1,I)_s$, etc. berechnet. Nemlich

$$(M,1)_s = k(1)_s$$
$$(M,2)_s = k(2)_s$$
$$(M,3)_s = k(3)_s$$
$$(M,4)_s = \gamma''_s.(M.2)_s + \gamma'''_s.(M,3)_s + k(4)_s$$
$$(M,5)_s = \delta''_s.(M,2)_s + \delta'''_s.(M,3)_s + \delta^{IV}_s.(M,4)_s + k(5)_s,$$
$$(M,6_s = \varepsilon''_s.(M,2)_s + \varepsilon'''_s.(M.3)_s + \varepsilon^{IV}_s.(M,4)_s + \varepsilon^{V}_s.(M,5)_s + k(6)_s$$

etc. etc.

5.

Endlich bekommt man für die Coefficienten der unbestimmten Elimination die folgenden Ausdrücke, die ich mehrerer Deutlichkeit wegen, und um sonst erforderliche, complicirte Bezeichnungen zu vermeiden, ausdrücklich für sechs Unbekannte hinschreiben werde. Die Ausdehnung derselben auf jede beliebige Anzahl von Unbekannten bietet nicht die geringste Schwierigkeit dar.

$$\{2,6\} = \gamma''\{4,6\} + \delta''\{5,6\} + \varepsilon''\{6,6\}$$
$$\{3,6\} = \gamma'''\{4,6\} + \delta'''\{5,6\} + \varepsilon'''\{6,6\}$$
$$\{4,6\} = \delta^{IV}\{5,6\} + \varepsilon^{IV}\{6,6\}$$
$$\{5,6\} = \varepsilon^{V}\{6,6\}$$
$$\{6,6\} = \frac{1}{(6,6,5)}$$

$$\{2,5\} = \gamma''\{4,5\} + \delta''\{5,5\} + \varepsilon''\{5,6\}$$
$$\{3,5\} = \gamma'''\{4,5\} + \delta'''\{5,5\} + \varepsilon'''\{5,6\}$$
$$\{4,5\} = \delta^{IV}\{5,5\} + \varepsilon^{IV}\{5,6\}$$
$$\{5,5\} = \frac{1}{(5,5,4)} + \varepsilon^{V}\{5,6\}$$

$$\{2,4\} = \gamma''\{4,4\} + \delta''\{4,5\} + \varepsilon''\{4,6\}$$
$$\{3,4\} = \gamma'''\{4,4\} + \delta'''\{4,5\} + \varepsilon'''\{4,6\}$$
$$\{4,4\} = \frac{1}{(4,4,3)} + \delta^{IV}\{4,5\} + \varepsilon^{IV}\{4,6\}$$

$$\{2,3\} = \gamma''\{3,4\} + \delta''\{3,5\} + \varepsilon''\{3,6\}$$
$$\{3,3\} = \frac{1}{(3,3,2)} + \gamma'''\{3,4\} + \delta'''\{3,5\} + \varepsilon'''\{3,6\}$$

$$\{2,2\} = \frac{1}{(2,2,1)} + \gamma''\{2,4\} + \delta''\{2,5\} + \varepsilon''\{2,6\}$$

$$\{1,1\} = \frac{1}{(1,1)}$$

Diese haben wieder mit einigen der vorhergehenden Ausdrücken grosse Analogie, und bei der Anwendung derselben muss man wieder in jeder Abtheilung bei der letzten Gleichung anfangen.

Von den vorstehenden Ausdrücken brauche ich keinen Beweis hinzuzufügen, da sie nicht weiter als das in ausdrückliche Formeln gebrachte Verfahren der unbestimmten Elimination sind, welches ich in Schum. Astr. Nachr. B VIII. No. 192 gegeben und bewiesen habe.

Suppl. 10. Das Beobachtungsverfahren betreffend, welches Gauss in der Hannöverschen Gradmessung angewandt hat.

1.

Es ist genugsam bekannt, dass Gauss bei der Gradmessung, die er in den 20ger Jahren in Hannover ausführte, in Bezug auf die Beobachtungen selbst ein eigenthümliches Verfahren angewandt hat. Die Beschaffenheit dieses Verfahrens hat er jedoch nie vollständig der Oeffentlichkeit übergeben, denn Alles, was er darüber veröffentlicht hat, besteht in einem dem Art. 22 seiner Abhandlung »Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae,« einverleibten Passus, aus welchem sein Beobachtungsverfahren durchaus nicht mit Bestimmtheit erkannt werden kann.

Da Alles, welches von diesem Gelehrten ausgegangen ist, die grösste Beachtung verdient, so ist man sehr darauf gespannt, zu erfahren, ob nicht in seinen hinterlassenen Papieren sich Auskunft darüber vorfinden sollte.

2.

Ein wissenschaftlicher Freund, welcher sich in der Lage befindet, hierüber am Ehesten Auskunft ertheilen zu können, machte mir kürzlich eine mündliche Mittheilung darüber, die ich hier, seinen Worten möglichst getreu folgend, aufnehme: Gauss hat Winkel beobachtet, und zwar nach dem Wiederholungsverfahren. Er hat jedes Mal den zu messenden Winkel nicht nur selbst, sondern auch dessen Supplement zum Umkreise gemessen. Er hat nicht nur die Winkel zwischen je zwei einander zunächst liegenden Dreiecksseiten, sondern vielmehr alle Winkel zwischen je zweien der auf der Station zusammen treffenden Dreiecksseiten gemessen.

3.

Ich stelle dieser Benachrichtigung zuerst den oben erwähnten Passus des »Supplementum etc.« gegenüber, welcher seinem ganzen Wortlaute

nach der folgende ist. Nachdem Gauss von den Bedingungsgleichungen, die ein Dreiecksnetz darbietet, geredet hat, fährt er fort: »*Silentio tamen*
»*praeterire non possumus monitum, quod theoria nostra, si applicatio pura*
»*atque rigorosa in votis est, supponit, quantitates per* v, v', v'', *etc. designa-*
»*tas revera vel immediate observatas esse, vel ex observationibus ita derivatas,*
»*ut inter se independentes maneant, vel saltem tales censeri possint. In praxi*
»*vulgari observantur anguli triangulorum ipsi, qui proin pro* v, v', v'', *etc.*
»*accipi possunt; sed memores esse debemus, si forte systema insuper con-*
»*tineat triangula talia, quorum anguli non sint immediate observati, sed*
»*prodeant tamquam summae vel differentiae angulorum revera observatorum,*
»*illos non inter observatorum numerum referendos, sed in forma composi-*
»*tionis suae in calculis retinendos esse. Aliter vero res se habebit in modo*
»*observandi ei simili, quem secutus est clar. Struve* (Astr. Nachr. II p. 431)
»*ubi directiones singulorum laterum ab eodem vertice proficiscentium obtinen-*
»*tur per comparationem cum una eademque directione arbitraria. Tunc*
»*scilicet hi ipsi anguli pro* v, v', v'', *etc. accipiendi sunt, quo pacto omnes*
»*anguli triangulorum in forma differentiarum se offerent, aequationesque*
»*conditionales primi generis, quibus per rei naturam sponte satisfit, tamquam*
»*superfluae cessabunt. Modus observationis, quem ipse secutus sum in dimen-*
»*sione triangulorum annis praecedentibus perfecta, differt quidem tum a prio-*
»*ri tum a posteriori modo, attamen respectu effectus posteriori aequiparari*
»*potest, ita ut in singulis stationibus directiones laterum inde proficiscentium*
»*ab initio quasi arbitrario numeratas pro quantitatibus* v, v', v'', *etc. accipere*
»*oporteat. Duo jam exempla elaborabimus, alterum ad modum priorem,*
»*alterum ad posteriorem pertinens.*«

4.

Betrachten wir hierauf die obige im Art 2 enthaltene Mittheilung, so begegnet uns zuerst der Ausdruck, dass Gauss nicht nur die Winkel selbst, sondern auch ihre Supplemente zum Umkreis gemessen hat. Diesen letzteren Ausdruck meine ich dahin erklären zu dürfen, dass Gauss bei seinen Messungen eine gewisse Anzahl der einzelnen Messungen der Winkel so angestellt habe, dass er die Alhidade des Theodoliten von der Linken zur Rechten, und eine eben so grosse Anzahl von Einzelnmessungen so, dass er die Alhidade von der Rechten zur Linken bewegt habe. Denn dieses kommt in der That der Messung des Sup-

plements der Winkel gleich, und ist nur eine veränderte Ausdrucksweise dafür. Dieses Verfahren wurde schon, ehe Gauss seine Gradmessung anfing, von verschiedenen Astronomen bei ihren geodätischen Messungen angewandt, es wird schon lange als ein unerlässliches Erforderniss angesehen, und wohl stets angewandt.

Gehen wir nun aber die Mittheilung ihrem ganzen Inhalte nach durch, so scheint es, als liesse sie sich mit dem oben angeführten Passus von Gauss nicht in Einklang bringen, da er darin sagt, dass sein Verfahren von dem von ihm zuerst angeführten, — dem Verfahren der Winkelmessungen — verschieden ist, und man dadurch leicht auf den Schluss geführt wird, dass er überhaupt nicht Winkel gemessen habe. Dieses war der erste Eindruck, den die genannte Mittheilung auf mich machte, aber nach einigem Nachdenken darüber kam ich darauf, dass diese Mittheilung mit dem angeführten Passus von Gauss sich in vollständigen Einklang bringen lässt. Dieser Passus, der sonst einige Dunkelheit darbietet, wird zugleich vollständig aufgeklärt.

Zwar kommt ein Nebenumstand mit in Betracht der etwas störend auftritt; diesen werde ich weiter unten angeben, und zuerst die Zusammenstimmung der zwei scheinbar sich widerstreitenden Stellen entwickeln.

5.

Es liegt an der Hand, dass man jede Winkelmessung als einen Gyrus betrachten kann, in welchem zwei Richtungen beobachtet worden sind, und ich habe in der oft angezogenen Abhandlung gezeigt, dass man diese Eigenschaft dazu benutzen kann, um die Gattung von Bedingungsgleichungen, die Gauss die der ersten Gattung, ich aber locale genannt habe, aus der Reihe der übrigen, die sich auf das Dreiecksnetz selbst beziehen, auszuscheiden, und in den Ausgleichungen auf den Stationen vollständig zu berücksichtigen.

6.

Seien nun auf einer Station n Gegenstände zu beobachten, und habe man alle Winkel zwischen je zweien dieser unabhängig von einander beobachtet, dann sind überhaupt $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Winkel beobachtet worden, zwischen welchen $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ locale Bedingungsgleichungen statt finden.

Folgt man nun der in der Gaussischen Abhandlung ausdrücklich gegebenen, und in Bezug auf die darin vorkommenden Krayenhof'schen Dreiecke angewandten Regel, so muss man diese Bedingungsgleichungen denen, welche das Dreiecksnetz giebt, anreihen, und kann darauf das Gaussische, in derselben Abhandlung entwickelte Ausgleichungsverfahren anwenden.

Zerlegt man hingegen, wie in meiner oft angezogenen Abhandlung erklärt, und im Art. 107 durch ein Beispiel erläutert ist, diese Winkelbeobachtungen in Richtungsbeobachtungen, so erhält man $\frac{n(n-1)}{2}$ Gyri von je zwei Richtungen, die von einem beliebigen Anfangspunkt gezählt werden können. Man findet leicht dass in diesem System von Gyris jede Richtung $n-1$ mal vorkommt. Es muss nun, ehe man die verschiedenen Stationen mit einander verbinden kann, die Ausgleichung auf der Station vorgenommen werden, und diese werde ich nach dem ersten von mir gegebenen Verfahren ausführen.

7.

Die Gewichte der Beobachtungen an sich, oder die der nackten Beobachtungen sollen einander gleich gesetzt, und demzufolge in Bezug auf die Richtungen

$$p = p' = p_, = p_,' = \text{etc.} = 1$$

gesetzt werden. Zufolge des Art. 67 meiner Abhandlung werden hierauf

$$P = P_, = \text{etc.} = 2$$
$$Q = Q' = \text{etc.} = n-1$$
$$\frac{p^2}{P} = \frac{p^2}{P_,} = \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

und nach dem Art. 69

$$(pp) = (p'p') = \text{etc.} = \frac{n-1}{2}$$
$$(pp') = (p'p'') = \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

welche letzte Gleichung sich überhaupt auf alle (pp) bezieht, in welchen die beiden p verschiedenartige Striche haben. Zu mehrerer Deutlichkeit werde ich das Täfelchen der (pp) aufstellen, welches in dem in Rede stehenden Falle immer die folgende Form haben wird,

	p	p'	p''	p'''	etc.
p	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	etc.
p'		$\frac{n-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	etc.
p''			$\frac{n-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	etc.
p'''				$\frac{n-1}{2}$	etc.
etc.					etc.

Wenden wir uns nun zum Inhalt des Art. 76 derselben Abhandlung, und bestimmen die dort mit N, N', etc. bezeichneten Grössen grade so wie dort angegeben ist, dann finden wir

$$N = N' = N'' = \text{etc.} = \text{etc.} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

und die Coefficienten der Endgleichungen auf der Station werden

$$(aa) = (bb,1) = (cc,2) = \text{etc.} = \frac{n}{2}$$

neben welchen alle Coefficienten, in deren Bezeichnung zwei verschiedene Buchstaben vorkommen $= 0$ sind. Die Verbesserungen der vorläufig angenommenen Werthe der Richtungen werden daher

$$w(1) = \frac{2(lx)}{n}$$

$$w(2) = \frac{2(lx')}{n}$$

$$w(3) = \frac{2(lx'')}{n}$$

etc.

Alle in der Abhandlung mit α, β, γ, etc. nebst angehängten Strichen bezeichneten Grössen werden Null, und das allgemeine dort entwickelte Ausgleichungsverfahren verwandelt sich in das specielle Gaussische. Der hier entwickelte Fall fügt daher den beiden in den Artt. 77 und 78 entwickelten ähnlichen Fällen einen dritten hinzu.

8.

Jetzt lässt sich der hier im Art. 3 angeführte Passus von Gauss vollständig erklären. Gauss sagt, er habe nicht das von ihm zuerst angeführte Verfahren der *praxis vulgaris* befolgt, welches, wie man weiss, damals darin bestand, dass man die Winkel zwischen je zwei einander zunächst liegenden Dreiecksseiten maass, und höchstens hie und da die Messung von Summen dieser Winkel, und die Ergänzungen im ganzen Umkreis (oder Horizont) hinzufügte. In der That hat er, zufolge des

Vorhergehenden, sich nicht damit begnügt, in einzelnen Fällen die eben genannten Summen und Ergänzungen zu messen, und er konnte daher sagen, dass sein Verfahren von der *praxis vulgaris* verschieden sei. Gauss sagt ferner, er habe auch nicht das zweite vorher von ihm angeführte Verfahren, nemlich das von Struve angegebene Verfahren der Richtungsmessungen, angewandt. Er hat, dem Vorhergehenden zufolge, in der That nicht Richtungen gemessen. Die dritte Angabe von Gauss, dass sein Verfahren *respectu effectus* dem Verfahren von Struve gleich gestellt werden könne, hat sich durch die Entwickelungen des vor. Art. auch bestätigt. Nur muss hier freilich hinzugefügt werden, dass in Bezug auf diesen Punkt stillschweigend vorausgesetzt ist, dass man bei Anwendung des Struve'schen Verfahrens in jedem Gyrus alle Richtungen eingeschnitten habe, denn sollte dieses nicht der Fall sein, so wäre die Wirkung eine andere.

9.

Ich sehe mich zufällig in den Stand gesetzt, den hier gegebenen Entwickelungen ein factisches Beispiel hinzu fügen zu können. In Schum. Astr. Nachr. Band IX, No. 205 u. 206 habe ich die folgende Aufgabe gelöst: »Wenn man zwischen einer beliebigen Anzahl von Punkten »ringsum im Horizonte (oder allgemeiner in einer und derselben Ebene) »die Winkel zwischen je zweien derselben gemessen hat, die Beobach»tungen so auszugleichen, dass die Summe der Quadrate der Verbesse»rungen ein Minimum wird.«

Diese Aufgabe ist in der That dieselbe, die ich hier im Art. 7 gelöst habe, nur ist jene Auflösung von dieser durchaus verschieden. Ich habe a. a. O. ein factisches Beispiel hinzugefügt, welches darin besteht, dass ich am 31. März 1827 die Fadenabstände im Meridiankreise der hiesigen Sternwarte den Forderungen der oben angeführten Aufgabe gemäss gemessen habe. Dass die Veranlassung zur Lösung dieser Aufgabe von Gauss herrührt, habe ich am Schlusse meines Aufsatzes ausgesprochen, und es geht aus den Aufklärungen, die der gegenwärtige Aufsatz giebt, hervor, dass Gauss mir schon damals im Grunde sein Verfahren bei seinen geodätischen Vermessungen mitgetheilt hat, nur hat er diese Anwendung verschwiegen, und blos die Anwendung auf die Bestimmung der Fadenabstände in den Meridianinstrumenten genannt. Den Tag, an welchem Gauss mir diese Mittheilung machte, kann ich

jetzt nicht mehr erinnern, aber aus dem Umstande, dass die Beobachtungen meines Beispiels im März des Jahres 1827 angestellt worden sind, verbunden mit anderen Erinnerungen aus jener Zeit, die ich noch vollständig im Gedächtniss habe, darf ich schliessen, dass die Mittheilung im Laufe des Jahres 1826 erfolgt ist. Ich werde nun dieses Beispiel nach der hier gegebenen Methode berechnen.

10.

Die Beobachtungen sind die folgenden:

Fäden	(2—1)	Gemessene Winkel	3590
-	(3—2)	- -	3066
-	(4—3)	- -	1808
-	(5—4)	- -	1823
-	(6—5)	- -	1723
-	(7—6)	- -	1798
-	(8—7)	- -	3293
-	(9—8)	- -	3395
-	(3—1)	- -	6630
-	(4—2)	- -	4883
-	(5—3)	- -	3645
-	(6—4)	- -	3570
-	(7—5)	- -	3528
-	(8—6)	- -	5085
-	(9—7)	- -	6683
-	(4—1)	- -	8438
-	(5—2)	- -	6713
-	(6—3)	- -	5390
-	(7—4)	- -	5353
-	(8—5)	- -	6828
-	(9—6)	- -	8476
-	(5—1)	- -	10280
-	(6—2)	- -	8438
-	(7—3)	- -	7188
-	(8—4)	- -	8656
-	(9—5)	- -	10223

Fäden	(6—1)	Gemessene	Winkel	12026
-	(7—2)	-	-	10253
-	(8—3)	-	-	10463
-	(9—4)	-	-	12056
-	(7—1)	-	-	13828
-	(8—2)	-	-	13523
-	(9—3)	-	-	13861
-	(8—1)	-	-	17118
-	(9—2)	-	-	16948
-	(9—1)	-	-	20478

Diese Beobachtungen habe ich a. a. O. in Einheiten des Umlaufs der Mikrometerschraube des angewandten Heliometers ausgedrückt, hier habe ich zur Vermeidung der Nullen, die sonst in den Rechnungen zum Vorschein kommen würden, den tausendsten Theil dieses Umlaufs zur Einheit gewählt.

11.

Es müssen jetzt zuerst durch Additionen der gemessenen Winkel die ihnen entsprechenden Richtungen berechnet werden, deren erste willkührlich ist, und für welche ich daher den Werth 1000 annehmen werde. Hierauf sind vorläufige Werthe der Richtungen nach Gutdünken anzunehmen, und die Unterschiede dieser mit den beobachteten Werthen zu berechnen. Die Form, in welcher diese Rechnungen aufzustellen sind, ist am Zweckmässigsten die der ersten Stationstäfelchen der Abhandlung, nur wird im gegenwärtigen Falle dieses Täfelchen auch die beobachteten Werthe der Richtungen zugleich enthalten müssen. Dieses Täfelchen ist jetzt das folgende, dessen Columnen, die nicht besonders überschrieben sind, sowohl die beobachteten Richtungen, wie die Unterschiede dieser von den vorläufig angenommenen Werthen derselben enthalten.

r	Vorl. Werthe							
1	1000	1000 0						
2	4590	4590 0	4590 0					
3	7656		7656 0	7656 0				
4	9464			9464 0	9464 0			
5	11287				11287 0	11287 0		
6	13010					13010 0	13010 0	
7	14808						14808 0	
8	18101							
9	21496							
1			1000 0					
2				4590 0				
3			7630 −26		7656 0			
4				9473 +9		9464 0		
5					11301 +14		11287 0	
6						13034 +24		
7	14808 0						14815 +7	
8	18101 0	18101 0						
9		21496 0						
1			1000 0					
2				4590 0				
3					7656 0			
4			9438 −26			9464 0		
5				11303 +16			11287 0	
6	13010 0				13046 +36			13010 0
7		14808 0				14817 +9		

r	Vorl. Werthe							
8	18095 −6						18115 +14	
9		21491 −5						21486 −10
1	1000 0					1000 0		
2		4590 0					4590 0	
3			7656 0					7656 0
4				9464 0				
5	11280 −7				11287 0			
6		13028 +18				13026 +16		
7			14844 +36				14843 +35	
8				18120 +19				18119 +18
9					21510 +14			
1		1000 0			1000 0		1000 0	
2			4590 0			4590 0		
3				7656 0				
4	9464 0							
5								
6								
7		14828 +20						
8			18113 +12		18118 +17			
9	21522 +26			21517 +21		21538 +42	21478 −18	

Ich habe hier der leichteren Uebersicht wegen alle Zahlen hingeschrieben, in der Praxis würde man aber alle Richtungen weglassen können, die mit den vorläufigen Werthen übereinstimmen müssen.

12.

Das folgende Täfelchen ist das zweite Stationstäfelchen, welches auf einfache Weise dadurch aus dem ersten folgt, dass man das arithmetische Mittel aus der Summe der Fehler, die jeder Gyrus zeigt, von diesen Fehlern abzieht; eine Rechnung welche sich im gegenwärtigen Falle im Kopfe machen lässt.

No. des Gyrus	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	0							
2		0	0						
3			0	0					
4			•	0	0				
5					0	0			
6						0	0		
7							0	0	
8								0	0
9	+13.0		−13.0						
10		−4.5		+4.5					
11			−7.0		+7.0				
12				−12.0		+12.0			
13					−3.5		+3.5		
14						+3.0		−3.0	
15							+2.5		−2.5
16	+13.0			−13.0					
17		−8.0			+8.0				
18			−18.0			+18.0			
19				−4.5			+4.5		
20					−7.0			+7.0	
21						+5.0			−5.0
22	+3.5				−3.5				
23		−9.0				+9.0			
24			−18.0				+18.0		
25				−9.5				+9.5	
26					−7.0				+7.0
27	−8.0					+8.0			
28		−17.5					+17.5		
29			−9.0					+9.0	
30				−13.0					+13.0
31	−10.0						+10.0		
32		−6.0						+6.0	
33			−10.5						+10.5
34	−8.5							+8.5	
35		−21.0							+21.0
36	+9.0								−9.0
(lx), (lx'), etc.	+12.0	−66.0	−75.5	−47.5	−6.0	+55.0	+56.0	+37.0	+35.0

Da hier $n=9$ ist, so wird zufolge des Art. 7

$$w(1) = + \tfrac{2}{9} \times 12.0\,,\quad w(2) = - \tfrac{2}{9} \times 66.0\,,\ \text{etc.}$$

oder

$$w(1) = + \ \ 2.67$$
$$w(2) = - \ 14.67$$
$$w(3) = - \ 16.78$$
$$w(4) = - \ 10.55$$
$$w(5) = - \ \ 1.33$$
$$w(6) = + \ 12.22$$
$$w(7) = + \ 12.44$$
$$w(8) = + \ \ 8.22$$
$$w(9) = + \ \ 7.78$$

und fügt man diese Werthe den oben vorläufig angenommenen Werthen der Richtungen hinzu, so erhält man die folgenden wahrscheinlichsten Werthe derselben,

$$y(1) = \ \ 1002.67$$
$$y(2) = \ \ 4575.33$$
$$y(3) = \ \ 7639.22$$
$$y(4) = \ \ 9453.45$$
$$y(5) = 11285.67$$
$$y(6) = 13022.22$$
$$y(7) = 14820.44$$
$$y(8) = 18109.22$$
$$y(9) = 21503.78$$

In den A. N. No. 206 fand ich, in der hier angenommenen Einheit ausgedrückt, die Werthe der Winkel wie folgt, denen ich die aus den vorstehenden Richtungen folgenden hinzufüge.

$2-1 = 3572.7 \ldots\ldots 3572.66$
$3-2 = 3063.9 \ldots\ldots 3063.89$
$4-3 = 1814.2 \ldots\ldots 1814.23$
$5-4 = 1832.2 \ldots\ldots 1832.22$
$6-5 = 1736.5 \ldots\ldots 1736.55$
$7-6 = 1798.2 \ldots\ldots 1798.22$
$8-7 = 3288.8 \ldots\ldots 3288.78$
$9-8 = 3394.6 \ldots\ldots 3394.56$

die, wie man sieht, mit jenen vollständig übereinstimmen.

13.

Ich komme jetzt auf den Nebenumstand, dessen ich im Art. 4 erwähnt habe, und der etwas störend auftritt.

Zufolge der oft angezogenen Abhandlung ist, mit Bezug darauf dass alle ursprünglichen Gewichte gleich 1 gesetzt worden sind, die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler

$$W = (ll) - (lx)\,w(1) - (lx')\,w(2) - (lx'')\,w(3) - \ldots$$

wo (ll) die Summe der Quadrate der Fehler bezeichnet, die das zweite Stationstäfelchen angiebt. Für unser Beispiel findet man

$$(ll) = 6153$$

und

$$(lx)\,w(1) + (lx')\,w(2) + \ldots = 4721$$

folglich

$$W = 1432$$

A. N. No. 206 wurde, in die hier angewandte Einheit übertragen,

$$W = 2868$$

gefunden, welcher Werth, bis auf einen kleinen, zu übergehenden Unterschied, das Doppelte von dem hier gefundenen ist. Nun ist aber hier das Gewicht einer Richtung = 1 gesetzt, während dort das Gewicht eines Winkels = 1 gesetzt wurde, und demzufolge muss aus einem nahe liegenden Grunde hier der Werth der Grösse W halb so gross sein wie dort. Die beiden vorstehenden Resultate für W befinden sich also nicht minder mit einander in Uebereinstimmung wie die Werthe der Richtungen und Winkel.

Nach dem Art. 150 der oft angezogenen Abhandlung steht die Berechnung des Divisors D, des Ausdrucks, welcher den schliesslichen mittleren Fehler einer Richtung giebt, wie folgt:

$$\begin{aligned} (Al) &= 72 \\ (Ax) &= 1 \\ (Ab) &= 0 \\ -(Ax) &= -9 \\ -(Au) &= -36 \\ D &= 28 \end{aligned}$$

denselben Werth habe ich in No. 206 der A. N. gefunden, obgleich ich dort diesen Divisor auf ganz andere Art berechnet habe. Berechnet man daher aus den hier erhaltenen Daten den mittleren Fehler einer Richtungsmessung, und vergleicht ihn mit dem a. a. O. erhaltenen mittleren Fehler einer Winkelmessung, so wird das Verhältniss des erstgenannten Fehlers zum zweitgenannten wie $\sqrt{\frac{1}{2}} : 1$ sein, welches mit einem bekannten Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung übereinstimmt.

14.

Die von mir auf zwei, ganz von einander verschiedenen Wegen erhaltenen Resultate sind in jeder Beziehung mit einander identisch, und so wird es nicht blos in dem hier ausgeführten Beispiele, sondern stets der Fall sein. Vergleichen wir aber den letzten Theil dieser Resultate mit der oft angezogenen Abhandlung von Gauss, so kommen wir auf einen Unterschied.

Die Durchführung des Beobachtungsverfahrens, welches hier als das von Gauss angewandte angenommen worden ist, giebt in Bezug auf die Ausgleichung auf den Stationen für die Summe der Fehlerquadrate einen von der Null verschiedenen Werth, während Gauss in seiner Abhandlung dieser Summe gar nicht erwähnt, und sie folglich stillschweigend $= 0$ gesetzt hat. Es knüpft sich hieran noch die folgende Folgerung. Wenn man annimmt, dass bei einer Triangulation auf jeder Station dasselbe, im Vorhergehenden für das Gaussische Beobachtungsverfahren gehaltene, Verfahren ausgeführt worden ist, so bekommt der Divisor D des Ausdrucks für den schliesslichen mittleren Fehler einer Richtung (oder eines Winkels), der sich nach der Ausgleichung des Netzes ergiebt, einen von der Anzahl der Bedingungsgleichungen oder, von (Ab), verschiedenen Werth.

Gauss hat in dem in seiner Abhandlung aus seiner Gradmessung entlehnten Beispiel den, von den Ausgleichungen auf den Stationen herrührenden, hier für das Beispiel berechneten Theil von W nicht in Betracht gezogen, und $D = (Ab)$ gesetzt. Die aus den obigen Betrachtungen sich ergebenden Gesammtwerthe von W und D sind beide nothwendig grösser als die von Gauss angewandten, aber eine Proportionalität in

den Vergrösserungen kann auf keinen Fall angenommen werden, da sie von zufälligen Umständen abhängen.

15.

Wenden wir hierauf noch einen Blick auf das Verfahren der Richtungsbeobachtungen. Auf allen Stationen, auf welchen Richtungen beobachtet werden, und zugleich in jedem Gyrus alle Richtungen beobachtet worden sind, wird $W = 0$, wenn man zur Bestimmung dieser Grösse die Resultate der Gruppen von Gyris anwendet. Die Anwendung der Gruppen von Gyris zu diesem Zweck ist, wenn Winkel beobachtet worden sind, der Anwendung der Endresultate der Winkelbeobachtungen völlig analog. Wenn auf allen Stationen Richtungen auf solche Art, wie eben verlangt wurde, beobachtet worden sind, dann wird am Ende der Ausgleichungsrechnungen $D = (Ab)$.

Wenn nur die eigentlichen Dreieckswinkel beobachtet worden sind, und man etwa vorhandene locale Bedingungsgleichungen mit den übrigen Bedingungsgleichungen zugleich behandelt, dann finden die beiden eben erklärten Gleichungen wieder statt. Es werden nemlich für die Stationen wieder $W = 0$, und für die schliessliche Berechnung des mittleren Fehlers wird wieder $D = (Ab)$. In Bezug auf das in der Gaussischen Abhandlung aus den Krayenhof'schen Dreiecken entlehnte Beispiel stimmt daher die Berechnung des mittleren Fehlers mit den vorstehenden Auseinandersetzungen überein, aber in Bezug auf das aus eigenen Beobachtungen entlehnte Beispiel ist dieses nicht der Fall.

16.

Es bildet sich von selbst in Folge der vorstehenden Betrachtungen die Schlussfrage: Warum hat Gauss die im vorvor. Art. erklärten Umstände, die unzweifelhaft vorhanden sind, nicht berücksichtigt? Eine unmittelbare Antwort auf diese Frage können wir nicht mehr erhalten, da Gauss nicht mehr unter den Lebenden weilt. Eine mittelbare Antwort von ihm selbst wäre durch seinen litterarischen Nachlass vielleicht zu erhalten, doch kann ich jetzt nicht wissen, ob dieses der Fall sein wird. Sollte eine Aufklärung von Gauss selb t nicht aufgefunden werden können, so bleibt uns nur übrig zu vermuthen, dass entweder das



oben erklärte Beobachtungsverfahren doch nicht ganz mit dem Gaussischen übereinstimmt, oder dass er die in Rede stehenden Umstände übersehen hat. Wenn die letztere Vermuthung richtig sein sollte, so wäre sie in Bezug auf Gauss ein äusserst vereinzelt dastehender Fall. Es ist jedenfalls sehr zu bedauern, dass Gauss sein Beobachtungsverfahren nicht veröffentlicht hat.

Druckfehler.

S. 69 Z. 5 v. u. statt: wahren dieser; lies: wahren Werth dieser.

S. 148 - 5 - - - Arten überein; - Arten erhaltenen überein.



ıssi-
nde
, so
ıder
ach-





